Operatore risolvente.
Autovalori ed autofunzioni del Laplaciano con condizioni di Dirichlet

Operatore risolvente

Esercizio 1. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$.*
Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in L^2(\Omega)$ e u, v sono le soluzioni deboli di

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega, \qquad u \in H^1_0(\Omega),$$

$$-\Delta v = g \quad in \quad \Omega, \qquad v \in H^1_0(\Omega),$$

allora $w = \alpha u + \beta v$ è la soluzione debole di

$$-\Delta w = \alpha f + \beta g \quad in \quad \Omega, \qquad w \in H^1_0(\Omega).$$

Esercizio 2. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$.*
Esiste una costante C che dipende da Ω tale che per ogni $f \in L^2(\Omega)$ si ha

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

dove u è la soluzione debole di

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega, \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

In particolare, abbiamo anche

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Teorema 3. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$. Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ definiamo la funzione*

$$u = R_\Omega(f) \in H^1_0(\Omega)$$

come l'unica soluzione debole del problema

$$-\Delta u = f \quad in \quad \Omega, \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

Allora, la mappa

$$R_\Omega : L^2(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$$

è un operatore lineare e limitato. Inoltre, come applicazione

$$R_\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

l'operatore R_Ω è:

- *definito positivo:*
$$\int_\Omega f R_\Omega(f)\,dx > 0 \quad per\ ogni \quad f \in L^2(\Omega),\ f \neq 0\ ;$$
- *simmetrico:*
$$\int_\Omega f R_\Omega(g)\,dx = \int_\Omega g R_\Omega(f)\,dx \quad per\ ogni \quad f, g \in L^2(\Omega)\ ;$$
- *compatto: per ogni successione $f_n \in L^2(\Omega)$ che converge debolmente in L^2 ad una funzione f, la successione $R_\Omega(f_n)$ converge fortemente in $L^2(\Omega)$ a $R_\Omega(f)$.*

Corollario 4. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ e sia $R_\Omega : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ l'operatore risolvente del Laplaciano di Dirichlet. Allora, esistono una successione crescente di numeri reali positivi*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \qquad \textit{tale che} \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty\,,$$

e di funzioni $u_n \in H^1_0(\Omega)$ tali che per ogni n

$$-\Delta u_n = \lambda_n u_n \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u_n \in H^1_0(\Omega), \qquad \int_\Omega u_n^2\,dx = 1\,.$$

Inoltre, la famiglia $\{u_n\}_{n\geq 1}$ è una base hilbertiana di $L^2(\Omega)$.

Definizione 5. *Dato un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ definiamo lo spettro dell'operatore di Laplace con condizioni di Dirichlet come l'insieme*

$$\sigma(\Omega) := \Big\{\lambda_j \ : \ j \geq 1\Big\}.$$

Gli elementi λ_j sono detti autovalori del Laplaciano (di Dirichlet) su Ω, mentre le soluzioni u_j di

$$-\Delta u_j = \lambda_j\, u_j \quad \textit{in} \quad \Omega, \qquad u_j \in H^1_0(\Omega), \qquad \int_\Omega u_j^2\,dx = 1\,,$$

sono dette autofunzioni del Laplaciano di Dirichlet.

Esercizio 6. *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$.*

(i) *Motrare che esiste una soluzione del problema variazionale*

$$\min\Big\{\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \ : \ u \in H^1_0(\Omega)\,,\ \int_\Omega u^2\,dx = 1\Big\}.$$

(ii) *Mostrare che ogni minimo u è soluzione debole di*

$$-\Delta u = \lambda\, u \quad \textit{in} \quad \Omega\,, \qquad u \in H^1_0(\Omega).$$

dove

$$\lambda = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

(iii) *Mostrare che λ è il più piccolo autovalore del Laplaciano con condizioni di Dirichlet, ovvero*

$$\lambda = \lambda_1(\Omega).$$