

Teorema della traccia in B_R

DISUGUAGLIANZA DELLA TRACCIA IN B_r

Lemma 1. Sia $\varphi \in C(\overline{B_1}) \cap C^1(B_1)$ una funzione definita su $\overline{B_1}$ in \mathbb{R}^d . Allora,

$$\int_{\partial B_1} \varphi d\mathcal{H}^{d-1} \leq d \left(\int_{B_1} \varphi dx + \int_{B_1} |\nabla \varphi| dx \right).$$

Dimostrazione. Sia $\theta \in \partial B_1$. Allora, per ogni $r \in (0, 1)$, abbiamo

$$\varphi(\theta) - \varphi(r\theta) = \int_r^1 \theta \cdot \nabla \varphi(\theta t) dt$$

Quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 r^{d-1} \varphi(\theta) dr - \int_0^1 r^{d-1} \varphi(r\theta) dr \right| &\leq \int_0^1 r^{d-1} |\varphi(\theta) - \varphi(r\theta)| dr \\ &\leq \int_0^1 r^{d-1} \int_r^1 |\theta \cdot \nabla \varphi(\theta t)| dt dr \\ &\leq \int_0^1 \int_r^1 t^{d-1} |\nabla \varphi|(\theta t) dt dr \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 t^{d-1} |\nabla \varphi|(\theta t) dt dr \\ &= \int_0^1 t^{d-1} |\nabla \varphi|(\theta t) dt. \end{aligned}$$

Integrando in θ su ∂B_1 , otteniamo

$$\frac{1}{d} \int_{\partial B_1} \varphi d\mathcal{H}^{d-1} \leq \int_{B_1} \varphi dx + \int_{B_1} |\nabla \varphi| dx. \quad \square$$

Lemma 2. Sia $\varphi \in C(\overline{B_1}) \cap C^1(B_1)$ una funzione definita su $\overline{B_1}$ in \mathbb{R}^d . Allora,

$$\int_{\partial B_1} \varphi^2 d\mathcal{H}^{d-1} \leq 2d \int_{B_1} \varphi^2 dx + d \int_{B_1} |\nabla \varphi|^2 dx.$$

Proposizione 3. Sia $\varphi \in C(\overline{B_r}) \cap C^1(B_r)$ una funzione definita su $\overline{B_r}$ in \mathbb{R}^d . Allora,

$$\int_{\partial B_r} \varphi^2 d\mathcal{H}^{d-1} \leq \frac{2d}{r} \int_{B_r} \varphi^2 dx + rd \int_{B_r} |\nabla \varphi|^2 dx.$$

DEFINIZIONE DELLA TRACCIA E DISUGUAGLIANZA DELLA TRACCIA PER FUNZIONI DI SOBOLEV

Lemma 4. Per ogni $u \in H^1(B_r)$ esiste una successione di funzioni φ_n tale che:

- per ogni $n \geq 1$, φ_n è definita su B_{R_n} , per un qualche $R_n > r$ ed è in $C^\infty(B_{R_n})$.
- la successione φ_n converge a u forte in $H^1(B_r)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - u\|_{H^1(B_r)} = 0.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo il riscalamento

$$u_\varepsilon(x) := u\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right).$$

Allora $u_\varepsilon \in H^1(B_{(1+\varepsilon)r})$ e si ha

$$\int_{B_{r(1+\varepsilon)}} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx = (1+\varepsilon)^{d-2} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{B_{r(1+\varepsilon)}} u_\varepsilon^2 dx = (1+\varepsilon)^d \int_{B_r} u^2 dx.$$

Quindi la famiglia u_ε è limitata in $H^1(B_r)$. Usando una funzione test $\varphi \in C_c^\infty(B_r)$, abbiamo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_r} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{B_r} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_r} u_\varepsilon \varphi \, dx = \int_{B_r} u \varphi \, dx,$$

ovvero u_ε converge a u debole- $H^1(B_r)$. D'altra parte

$$\int_{B_r} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx = (1 + \varepsilon)^{d-2} \int_{B_{r/(1+\varepsilon)}} |\nabla u|^2 \, dx \quad \text{e} \quad \int_{B_r} u_\varepsilon^2 \, dx = (1 + \varepsilon)^d \int_{B_{r/(1+\varepsilon)}} u^2 \, dx,$$

il che implica che u_ε converge a u forte- $H^1(B_r)$.

Ora, fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo la funzione $u_\varepsilon \in H^1(B_{r(1+\varepsilon)})$. Siccome $B_r \Subset B_{r(1+\varepsilon)}$, per il teorema di approssimazione in domini aperti, esiste una successione di funzioni $\varphi_{\varepsilon, n}$ che è C^∞ in $B_{r(1+\varepsilon/2)}$ e che converge forte- $H^1(B_r)$ a u_ε . La tesi segue estraendo una successione diagonale. \square

Lemma 5. Sia $u \in H^1(B_r)$ e sia $\varphi_n : \overline{B_r} \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni in

$$H^1(B_r) \cap C^1(B_r) \cap C(\overline{B_r})$$

che converge forte- $H^1(B_r)$ a u . Allora, la successione di tracce

$$\varphi_n : \partial B_r \rightarrow \mathbb{R}$$

è una successione di Cauchy in $L^2(\partial B_r)$. Inoltre, se

$$\varphi_n \in H^1(B_r) \cap C^1(B_r) \cap C(\overline{B_r}) \quad \text{e} \quad \psi_n \in H^1(B_r) \cap C^1(B_r) \cap C(\overline{B_r})$$

sono due successioni che convergono forte- $H^1(B_r)$ a u , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \psi_n\|_{L^2(\partial B_r)} = 0,$$

ovvero il limite delle successioni $\varphi_n : \partial B_r \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi_n : \partial B_r \rightarrow \mathbb{R}$ in $L^2(\partial B_r)$ è lo stesso.

Definizione 6. Data una funzione $u \in H^1(B_r)$, definiamo la traccia di u su ∂B_r come l'unica funzione

$$v \in L^2(\partial B_r)$$

ottenuta come limite in $L^2(\partial B_r)$ di una (qualsiasi) successione di funzioni

$$\varphi_n \in H^1(B_r) \cap C^1(B_r) \cap C(\overline{B_r})$$

che converge forte- $H^1(B_r)$ alla funzione u .

Per indicare la traccia di $u \in H^1(B_r)$ su ∂B_r useremo ancora la stessa lettera u .

Teorema 7. Siano B_r la palla di raggio r in \mathbb{R}^d e $u \in H^1(B_r)$. Allora

$$\int_{\partial B_r} u^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} \leq \frac{2d}{r} \int_{B_r} u^2 \, dx + rd \int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dx .$$

Osservazione 8. L'operatore che associa ad ogni funzione $u \in H^1(B_r)$ la sua traccia $u \in L^2(\partial B_r)$ è un operatore lineare e limitato.

Osservazione 9. Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^d e $u \in H^1(\Omega)$. Se $B_r(x_0) \subset \Omega$, allora

$$u \in L^2(\partial B_r(x_0)) \quad \text{e} \quad \int_{\partial B_r} u^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} \leq \frac{2d}{r} \int_{B_r} u^2 \, dx + rd \int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dx .$$

Di conseguenza, l'integrale

$$\int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{d-1}$$

è definito per ogni r tale che $\overline{B_r}(x_0) \subset \Omega$.

 INTEGRAZIONE IN COORDIANTE POLARI

Proposizione 10. Sia Ω un insieme aperto in \mathbb{R}^d e $u \in H^1(\Omega)$. Allora, per ogni punto $x_0 \in \Omega$ e per ogni coppia di raggi

$$0 \leq r < R$$

tale che

$$B_R(x_0) \subset \Omega,$$

si ha

$$\int_r^R \left(\int_{\partial B_s(x_0)} u d\mathcal{H}^{d-1} \right) ds = \int_{B_R(x_0) \setminus B_r(x_0)} u(x) dx.$$

In particolare, quando $r = 0$, si ha

$$\int_0^R \left(\int_{\partial B_s(x_0)} u d\mathcal{H}^{d-1} \right) ds = \int_{B_R(x_0)} u(x) dx.$$

SULLA CONTINUITÀ DELLA MEDIA

Proposizione 11. Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^d e $u \in H^1(\Omega)$. Sia $B_\rho(x_0) \subset \Omega$. Allora, la funzione

$$M(r) = \frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u$$

è $1/2$ -Hölder continua nell'intervallo aperto $(0, \rho)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $x_0 = 0$. Siano $\theta \in \partial B_1$ e $0 < r < R < \rho$. Allora,

$$\left| \frac{1}{R^{d-1}} \int_{\partial B_R} \varphi - \frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B_r} \varphi \right| = \left| \int_{\partial B_1} \varphi(R\theta) d\theta - \int_{\partial B_1} \varphi(r\theta) d\theta \right| \leq \int_{\partial B_1} |\varphi(R\theta) - \varphi(r\theta)| d\theta$$

Ora, osserviamo che

$$\varphi(R\theta) - \varphi(r\theta) = \int_r^R \theta \cdot \nabla \varphi(t\theta) dt$$

e quindi

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{R^{d-1}} \int_{\partial B_R} \varphi - \frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B_r} \varphi \right| &\leq \int_{\partial B_1} \int_r^R |\nabla \varphi|(t\theta) dt d\theta \\ &\leq C_d (R-r)^{1/2} \left(\int_{\partial B_1} \int_r^R |\nabla \varphi|^2(t\theta) dt d\theta \right)^{1/2} \\ &\leq C_d r^{-\frac{d-1}{2}} (R-r)^{1/2} \left(\int_{\partial B_1} \int_r^R t^{d-1} |\nabla \varphi|^2(t\theta) dt d\theta \right)^{1/2} \\ &= C_d r^{-\frac{d-1}{2}} (R-r)^{1/2} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

 GLI SPAZI H_0^1 ED IL TEOREMA DELLA TRACCIA

Teorema 12. *Siano B_r la palla di raggio $r > 0$ in \mathbb{R}^d e $u \in H^1(B_r)$. Allora, sono equivalenti:*

- (i) $u \in H_0^1(B_r)$;
- (ii) la traccia di u su ∂B_r è nulla.

Dimostrazione. L'implicazione (i) \Rightarrow (ii) segue direttamente dalla definizione. Infatti, basta osservare che per definizione di $H_0^1(B_r)$ esiste una successione $\varphi_n \in C_c^\infty(B_r)$ che converge a u forte in H^1 . Siccome la traccia di u è il limite delle tracce di φ_n e $\varphi_n = 0$ su ∂B_r , abbiamo che anche la traccia di u è zero su ∂B_r .

Dimostriamo ora che (ii) \Rightarrow (i). Consideriamo una famiglia di funzioni $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(B_r)$ tale che

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B_{r-\varepsilon}, \\ 0 \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq 1 & \text{e } |\nabla \varphi_\varepsilon|(x) \leq \frac{2}{\varepsilon} \end{cases} \text{ per } x \in B_r \setminus B_{r-\varepsilon}.$$

Allora, $u\varphi_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^2(B_r)$ e si ha che

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |\nabla(u - u\varphi_\varepsilon)|^2 dx &\leq 2 \int_{B_r \setminus B_{r-\varepsilon}} \varphi_\varepsilon^2 |\nabla u|^2 dx + 2 \int_{B_r \setminus B_{r-\varepsilon}} u^2 |\nabla \varphi_\varepsilon|^2 dx \\ &\leq 2 \int_{B_r \setminus B_{r-\varepsilon}} |\nabla u|^2 dx + \frac{8}{\varepsilon^2} \int_{B_r \setminus B_{r-\varepsilon}} u^2 dx \\ &\leq 2 \int_{B_r \setminus B_{r-\varepsilon}} |\nabla u|^2 dx + \frac{8}{\varepsilon^2} \int_{r-\varepsilon}^r \left(\int_{\partial B_s} u^2 \right) ds \end{aligned}$$

Ora, per ogni $\theta \in \partial B_1$ ed ogni $0 < s < r$ abbiamo

$$|u(r\theta) - u(s\theta)| \leq \int_s^r |\nabla u|(t\theta) dt.$$

Di conseguenza, abbiamo

$$|u|(s\theta) \leq |u|(r\theta) + \int_s^r |\nabla u|(t\theta) dt,$$

ed anche

$$u^2(s\theta) \leq 2u^2(r\theta) + 2 \left(\int_s^r |\nabla u|(t\theta) dt \right)^2 \leq 2u^2(r\theta) + 2(r-s) \int_s^r |\nabla u|^2(t\theta) dt.$$

Integrating in θ , we get

$$\frac{1}{s^{d-1}} \int_{\partial B_s} u^2 d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial B_1} u^2(s\theta) d\theta \leq \int_{\partial B_1} 2(r-s) \int_s^r |\nabla u|^2(t\theta) dt d\theta \leq \frac{2(r-s)}{s^{d-1}} \int_{B_r \setminus B_s} |\nabla u|^2 dx.$$

Di conseguenza,

$$\frac{8}{\varepsilon^2} \int_{r-\varepsilon}^r \left(\int_{\partial B_s} u^2 \right) ds \leq \frac{8}{\varepsilon^2} \int_{r-\varepsilon}^r 2(r-s) ds \int_{B_r \setminus B_{r-\varepsilon}} |\nabla u|^2 dx = 8 \int_{B_r \setminus B_{r-\varepsilon}} |\nabla u|^2 dx.$$

Questo conclude la dimostrazione. □