Teoremi di composizione

Composizione di funzioni $W^{1,p}(I)$ con funzioni C^1

Teorema 1. *Sia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $G(0)=0$.*
Sia I un intervallo aperto e sia $p\in[1,\infty]$. Allora, per ogni $u\in W^{1,p}(I)$, abbiamo che

$$G(u)\in W^{1,p}(I)\qquad e \qquad (G\circ u)'=G'(u)u'\,.$$

Dimostrazione. Siccome $u\in W^{1,p}(I)$, abbiamo che $u\in L^\infty(I)$. Prendiamo una costante $R\ge \|u\|_{L^\infty(I)}$. Siccome $G':[-R,R]\to\mathbb{R}$ è continua, abbiamo che G' è limitata su $[-R,R]$. Sia

$$L:=\max_{[-R,R]}|G'(x)|.$$

Allora,

$$|G(x)|\le L|x|\quad\text{per ogni}\quad x\in[-R,R].$$

Di conseguenza,

$$|G(u)|\le L|u|$$

e quindi $G(u)\in L^p(I)$ e $G'(u)u'\in L^p(I)$. Sia ora $\varphi_n\in C^\infty(I)\cap W^{1,p}(I)$ una successione di funzioni che converge a u fortemente in $W^{1,p}(I)$ e $L^\infty(I)$. Siccome G è continua, abbiamo che

$$|G(\varphi_n)-G(u)|\le L|\varphi_n-u|,$$

e quindi $G(\varphi_n)\to G(u)$ in L^p. Analogamente,

$$|G'(\varphi_n)\varphi_n'-G'(u)u'|\le|G'(\varphi_n)||\varphi_n'-u'|+|G'(\varphi_n)-G'(u)||u'|\le L|\varphi_n'-u'|+|G'(\varphi_n)-G'(u)||u'|,$$

e la tesi segue dalla convergenza uniforme di $|G'(\varphi_n)-G'(u)|$ a zero. □

Convergenza forte e composizioni

Proposizione 2. *Sia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $G(0)=0$. Sia I un intervallo aperto e sia $p\in[1,\infty]$. Sia $u_n\in W^{1,p}(I)$ una successione che converge fortemente ad una funzione $u\in W^{1,p}(I)$. Allora, la successione $G(u_n)$ converge fortemente in $W^{1,p}(I)$ a $G(u)$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $u_n\in L^\infty(I)$ e che la successione u_n converge fortemente in $L^\infty(I)$ alla funzione u. Allora, esiste una costante $R>0$ tale che

$$\|u\|_{L^\infty(I)}\le R\quad\text{e}\quad\|u_n\|_{L^\infty(I)}\le R\quad\text{per ogni}\quad n\ge1.$$

Di conseguenza,

$$G':[-R,R]\to\mathbb{R}$$

è limitata e uniformemente continua su $[-R,R]$. In particolare, poniamo

$$L:=\max_{[-R,R]}|G'(x)|.$$

La tesi segue dalle stime

$$|G(u_n)-G(u)|\le L|u_n-u|.$$

$$
\begin{aligned}
|G'(u_n)u_n' - G'(u)u'| &\le |G'(u_n)u_n' - G'(u_n)u'| + |G'(u_n)u' - G'(u)u'| \\
&\le |G'(u_n)||u_n' - u'| + |G'(u_n) - G'(u)||u'| \\
&\le L|u_n' - u'| + |G'(u_n) - G'(u)||u'|.
\end{aligned}
$$

Osserviamo che possiamo assumere

$$u_n \to u \quad \text{puntualmente quasi-ovunque su} \quad I.$$

Siccome

$$|G'(u_n) - G'(u)||u'| \le 2L|u'|,$$

per il teorema della convergenza dominata, abbiamo che

$$|G'(u_n) - G'(u)||u'| \to 0 \quad \text{fortemente in} \quad L^p(I).$$

Quindi,

$$G(u_n) \to G(u) \quad \text{e} \quad G'(u_n)u_n' \to G'(u)u' \quad \text{fortemente in} \quad L^p(I).$$

□

Esercizio 3. *Sia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $G(0) = 0$.*
Siano I un intervallo aperto e $p \in (1, \infty)$. Mostare che se $u_n \in W^{1,p}(I)$ converge debolmente a $u \in W^{1,p}(I)$, allora $G(u)$ converge debolmente a $G(u_n)$.

Convergenza forte delle composizioni con diverse funzioni C^1

Proposizione 4. *Consideriamo una successione di funzioni $G_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, di classe C^1 ed una funzione $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Supponiamo che:*

- *$G(0) = 0$ e $G_k(0) = 0$ per ogni $k \ge 1$;*
- *$G_k(x) \to G(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;*
- *$G_k'(x) \to G'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;*
- *esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$\|G'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le L \qquad e \qquad \|G_k'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le L \quad \text{per ogni} \quad k \ge 1\,.$$

Allora, dati un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}^d$, $p \in [1, \infty)$ ed $u \in W^{1,p}(I)$, abbiamo che:

$$G_k(u) \to G(u) \quad \text{fortemente in} \quad W^{1,p}(I) \quad \text{per} \quad k \to +\infty\,.$$