Una caratterizzazione dello spazio $W^{1,p}$

Lemma 1. *Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$. Data una funzione $u \in L^p$ con $p \in (1, +\infty)$, sono equivalenti:*

(1) $u \in W^{1,p}(I)$;

(2) *esiste una costante $C > 0$ tale che:*

$$\left|\int_I u(x)\varphi'(x)\,dx\right| \le C\|\varphi\|_{L^q(I)} \qquad \textit{per ogni} \qquad \varphi \in C^1_c(I)\,,$$

dove $q = \frac{p}{p-1}$.

Dimostrazione. Dimostriamo che (2) implica (1). Consideriamo il funzionale

$$T : C^1_c(I) \to \mathbb{R}\ , \qquad T(\varphi) = \int_I u(x)\varphi'(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in C^1_c(I)\,.$$

Osserviamo che $C^1_c(I)$ è un sottospazio lineare di $L^q(I)$ e che (per ipotesi) il funzionale T è limitato su $C^1_c(I)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_{L^q(I)}$, ovvero:

$$|T(\varphi)| \le C\|\varphi\|_{L^q(I)} \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in C^1_c(I)\,.$$

Per il teorema di Hahn-Banach, esiste un funzionale lineare

$$S : L^q(I) \to \mathbb{R}$$

tale che $S \equiv T$ su $C^1_c(I)$ e

$$|S(\varphi)| \le C\|\varphi\|_{L^q(I)} \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in L^q(I)\,.$$

Esiste quindi una funzione $v \in L^p(I)$ tale che

$$S(\varphi) = \int_I v(x)\varphi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in L^q(I)\,.$$

In particolare, siccome $S \equiv T$ su $C^1_c(I)$,

$$\int_I u(x)\varphi'(x)\,dx = T(\varphi) = S(\varphi) = \int_I v(x)\varphi(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad \varphi \in C^1_c(I)\,.$$

Quindi, $u \in W^{1,p}(I)$ e $u' = -v$. □

Teorema 2. *Data una funzione $u \in L^p(\mathbb{R})$ con $p \in (1, +\infty)$, sono equivalenti:*

(1) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$;

(2) *esiste una costante $C > 0$ tale che:*

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L^p_x(\mathbb{R})} \le C|h| \qquad \textit{per ogni} \qquad h \in \mathbb{R}\,.$$

Inoltre, uno può prendere $C = \|u'\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Per il teorema di rappresentazione, abbiamo:

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t)\, dt = h \int_0^1 u'(x+sh)\, ds.$$

Quindi,

$$|u(x+h) - u(x)| \leq |h| \int_0^1 |u'(x+sh)|\, ds\,,$$

e di conseguenza

$$|u(x+h) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p\, ds\,.$$

Ora, calcoliamo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|^p\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}} |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p\, ds\, dx \\
&= |h|^p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |u'(x+sh)|^p\, dx\, ds \\
&= |h|^p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^p\, dx\, ds \\
&= |h|^p \int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^p\, dx\,.
\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Data una funzione $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R})$, osserviamo che

$$\int_{\mathbb{R}} \Big[u(x+h) - u(x)\Big]\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)\Big[\varphi(x-h) - \varphi(x)\Big]\, dx.$$

Siccome,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \Big[u(x+h) - u(x)\Big]\varphi(x)\, dx\right| \leq \|u(x+h) - u(x)\|_{L^p_x(\mathbb{R})}\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C|h|\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R})}\,,$$

otteniamo che

$$\left|\int_{\mathbb{R}} u(x)\Big[\varphi(x-h) - \varphi(x)\Big]\, dx\right| \leq C|h|\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R})}\,.$$

Siccome, $\varphi \in C^1_c(I)$, abbiamo che

$$\frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{h} \to \varphi'(x)$$

uniformemente in I, per $h \to 0$. Quindi, passando al limite, abbiamo

$$\left|\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)\, dx\right| \leq C\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

□

Teorema 3. *Data una funzione $u \in L^p(I)$ con $p \in (1, +\infty)$, sono equivalenti:*

(1) $u \in W^{1,p}(I)$;

(2) *esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni intervallo compatto $I' \subset I$ si ha*

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L^p_x(I')} \leq C|h| \qquad \textit{per ogni} \qquad h \in \mathbb{R}\,,$$

per ogni $|h| < dist(\partial I, \partial I')$.

Inoltre, uno può prendere $C = \|u'\|_{L^p(I)}$.