Equazione del calore

Equazione del calore

Teorema 1. *Siano $\ell > 0$, $I = (0, \ell)$, $u_0 \in L^2(I)$ e*

$$c_k := \int_0^\ell u_0(x)\phi_k(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad k \geq 1\,,$$

dove

$$\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\Big(\frac{\pi}{\ell}kx\Big).$$

Per ogni $t > 0$ definiamo la funzione

$$u_t \in L^2(I)\,, \quad u_t := \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-t\lambda_k}\phi_k\,,$$

dove la serie converge fortemente in $L^2(I)$ e dove

$$\lambda_k := \frac{\pi^2}{\ell^2}\,k^2\,.$$

Allora:

(i) *u_t converge a u_0 fortemente in $L^2(I)$ per $t \to 0$;*

(ii) *per ogni $t > 0$, definiamo la funzione*

$$v_t \in L^2(I)\ , \qquad v_t := \sum_{k=1}^{+\infty}(-\lambda_k)c_k e^{-t\lambda_k}\phi_k\,,$$

dove la serie converge fortemente in $L^2(I)$. Allora,

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{|s|}\|u_{t+s} - u_t - sv_t\|_{L^2(I)} = 0.$$

(iii) *per ogni $t > 0$, la funzione u_t è soluzione forte del problema*

$$\partial_{xx}u_t = v_t \quad \text{in} \quad I\ , \qquad u_t \in H_0^1(I).$$

Definizione 2. *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach con norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Dati un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ ed una funzione $u : I \to \mathcal{B}$ diciamo che:*

- *$u \in C(I; \mathcal{B})$, se la funzione u è continua su I, ovvero se*

$$\lim_{s\to 0}\|u(t+s) - u(t)\|_{\mathcal{B}} = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad t \in I\,;$$

- *$u \in C(I; \mathcal{B})$, se esiste una funzione $v \in C(I; \mathcal{B})$ tale che*

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{|s|}\|u(t+s) - u(t) - sv(t)\|_{\mathcal{B}} = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad t \in I\,.$$

Definizione 3. *Diciamo che la funzione*

$$u \in C\big([0,+\infty); L^2(I)\big) \cap C^1\big((0,+\infty); L^2(I)\big) \cap C\big((0,+\infty); H^2(I) \cap H^1_0(I)\big),$$

è una soluzione dell'equazione del calore (con condizioni di Dirichlet) e con dato iniziale $u_0 \in L^2(I)$, *se*

$$\begin{cases} \partial_t u_t(x) = \partial_{xx} u_t(x) \quad \textit{per ogni} \quad t > 0, \quad x \in I\,; \\ \lim\limits_{t\to 0} u_t = u_0 \quad \textit{fortemente in} \quad L^2(I)\,; \\ u_t \in H^1_0(I) \cap H^2(I) \quad \textit{per ogni} \quad t > 0\,. \end{cases}$$

Proposizione 4 (Unicità della soluzione)**.** *Siano* I *un intervallo aperto e limitato e*

$$u \in C\big([0,+\infty); L^2(I)\big) \cap C^1\big((0,+\infty); L^2(I)\big) \cap C\big((0,+\infty); H^2(I) \cap H^1_0(I)\big),$$

una soluzione dell'equazione del calore con dato iniziale $u_0 \in L^2(I)$. *Allora, la funzione*

$$M : [0,+\infty) \to \mathbb{R}\ , \qquad M(t) := \int_I |u_t(x)|^2\,dx\,,$$

è decrescente e

$$M(t) \le \|g\|^2_{L^2(I)} e^{-Ct} \qquad \textit{per ogni} \qquad t \ge 0\,,$$

dove $C > 0$ *è una costante universale. In particolare, la soluzione dell'equazione del calore è unica.*

Dimostrazione. Dimostriamo intanto che M sia derivabile su $(0,+\infty)$ e che

$$M'(t) = 2\int_I \partial_t u_t(x) u_t(x)\,dx\,,$$

dove $\partial_t u : (0,+\infty) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ è la derivata (nella variabile $t \in (0,+\infty)$) della funzione

$$u : (0,+\infty) \to L^2(\mathbb{R}^d)\,.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}\Big(M(t+s) - M(t)\Big) &= \frac{1}{s}\int_I \big(u_{t+s}^2 - u_t^2\big)\,dx \\ &= \frac{1}{s}\int_I \big(u_{t+s} - u_t\big)\big(u_{t+s} + u_t\big)\,dx \\ &= \int_I \frac{u_{t+s} - u_t}{s} 2u_t\,dx + \int_I \frac{u_{t+s} - u_t}{s}\big(u_{t+s} - u_t\big)\,dx\,. \end{aligned}$$

Siccome abbiamo i limiti forti in $L^2(I)$

$$\lim_{s\to 0} \frac{u_{t+s} - u_t}{s} = \partial_t u_t \qquad \text{e} \qquad \lim_{s\to 0} \big(u_{t+s} - u_t\big) = 0\,,$$

otteniamo che

$$M'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\Big(M(t+s) - M(t)\Big) = 2\int_I \partial_t u_t(x) u_t(x)\,dx\,.$$

Usando l'equazione

$$\partial_t u_t = \partial_{xx} u_t$$

otteniamo

$$M'(t) = 2\int_I \partial_t u_t(x) u_t(x)\,dx\,.$$

Siccome $u_t \in H^1_0(I)$ e $\partial_x u_t \in H^1(I)$, abbiamo che

$$M'(t) = 2\int_I \partial_{xx} u_t(x) u_t(x)\,dx = -2\int_I \big(\partial_x u_t(x)\big)^2\,dx\,.$$

Ora, per la disuguaglianza di Poincaré, esiste una costante $C > 0$ tale che

$$M(t) = \int_I u_t^2(x)\,dx \leq C \int_I \big(\partial_x u_t(x)\big)^2\,dx\,.$$

Quindi,

$$M'(t) \geq -\frac{2}{C} M(t)\,,$$

e di conseguenza

$$M(t) \leq e^{-\kappa t} M(0) = e^{-\kappa t} \|u_0\|_{L^2(I)}\,,$$

dove $\kappa = 2/C$. $\square$