Principio del massimo debole e principio del confronto

Principio del massimo debole

Proposizione 1. *Siano I un intervallo aperto e limitato, $V \in L^1(I)$ ed $f \in L^2(I)$. Sia u la soluzione debole di*

$$-u'' + Vu = f \quad in \quad I\,, \qquad u \in H_0^1(I)\,.$$

Se $V \geq 0$ e $f \geq 0$ in I, allora $u \geq 0$ su I.

Dimostrazione. Definiamo il funzionale

$$\mathcal{F}(\varphi) := \frac{1}{2}\int_I \big(\varphi'(x)\big)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_I V(x)\varphi^2\,dx - \int_I f(x)\varphi\,dx\,,$$

ed osserviamo che se u è la soluzione debole del problema

$$-u'' + Vu = f \quad \text{in} \quad I\,, \qquad u \in H_0^1(I)\,,$$

allora u è l'unico minimo del funzionale $\mathcal{F}$ in $H_0^1(I)$. Siccome la parte positiva u_+ è in $H_0^1(I)$ (questo perché $u_+ \in H^1(I)$ e $u_+ = 0$ negli estremi dell'intervallo I), abbiamo che

$$\begin{aligned}
0 &\geq \mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u_+)\\
&= \frac{1}{2}\int_I \big(u_-'(x)\big)^2\,dx + \frac{1}{2}\int_I V(x)u_-^2(x)\,dx + \int_I f(x)u_-(x)\,dx\\
&\geq \frac{1}{2}\int_I \big(u_-'(x)\big)^2\,dx
\end{aligned}$$

dove u_- è la parte negativa di u, ovvero

$$u = u_+ - u_-\ .$$

Di conseguenza

$$\int_I \big(u_-'(x)\big)^2\,dx = 0\,,$$

e, siccome $u_- \in H_0^1(I)$, otteniamo che $u_- \equiv 0$. □

Corollario 2. *Siano I un intervallo aperto e limitato e $V \in L^1(I)$ una funzione non-negativa. Siano $f_1, f_2 \in L^2(I)$ tali che*

$$f_1 \leq f_2 \quad su \quad I\,.$$

Siano u_1 e u_2 le soluzioni deboli di

$$-u_1'' + Vu_1 = f_1 \quad in \quad I\,, \qquad u_1 \in H_0^1(I)\,;$$

$$-u_2'' + Vu_2 = f_2 \quad in \quad I\,, \qquad u_2 \in H_0^1(I)\,.$$

Allora $u_1 \leq u_2$ su I.

Confronto tra soluzioni su intervalli diversi

Proposizione 3. *Siano $I \subset J$ due intervalli aperti e limitati. Siano $v \in L^1(J)$ e $V \in L^1(I)$ due funzioni non-negative e tali che*

$$v \leq V \quad su \quad I.$$

Data una funzione non-negativa $f \in L^2(J)$, consideriamo le soluzioni deboli U e u di

$$-U'' + vU = f \quad in \quad J\,, \qquad U \in H_0^1(J)\,;$$

$$-u'' + Vu = f \quad in \quad I\,, \qquad u \in H_0^1(I)\,.$$

Allora $U \geq u$.

Dimostrazione. Osserviamo che le soluzioni u ed U sono entrambe non-negative; inoltre, osserviamo che definendo $\widetilde{u}$ su J come

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x \in I, \\ 0 & \text{se} \quad x \in J \setminus \overline{I}, \end{cases}$$

otteniamo che

$$u \wedge U \in H_0^1(I) \quad \text{e} \quad \widetilde{u} \vee U \in H_0^1(J).$$

Quindi

$$\frac{1}{2}\int_I \big(u'\big)^2 + \frac{1}{2}\int_I V(x)u^2 - \int_I f(x)u \leq \frac{1}{2}\int_I \big((u \wedge U)'\big)^2 + \frac{1}{2}\int_I V(x)(u \wedge U)^2 - \int_I f(x)(u \wedge U)$$

$$\frac{1}{2}\int_J \big(U'\big)^2 + \frac{1}{2}\int_J v(x)U^2 - \int_J f(x)U \leq \frac{1}{2}\int_J \big((\widetilde{u} \vee U)'\big)^2 + \frac{1}{2}\int_J v(x)(\widetilde{u} \vee U)^2 - \int_J f(x)(\widetilde{u} \vee U)\,.$$

Ora, siccome

$$\int_I \big(u'\big)^2\,dx + \int_J \big(U'\big)^2 = \int_I \big((u \wedge U)'\big)^2 + \int_J \big((\widetilde{u} \vee U)'\big)^2\,,$$

$$\int_I f(x)u + \int_J f(x)U = \int_I f(x)(u \wedge U) + \int_J f(x)(\widetilde{u} \vee U)\,,$$

otteniamo che

$$\int_I Vu^2 + \int_J vU^2 \leq \int_I V(u \wedge U)^2 + \int_J v(\widetilde{u} \vee U)^2\,,$$

il che è equivalente a

$$\int_J V\widetilde{u}^2 + \int_J vU^2 \leq \int_J V(\widetilde{u} \wedge U)^2 + \int_J v(\widetilde{u} \vee U)^2\,.$$

Ora, siccome

$$0 \leq v(x) \leq V(x) \qquad \text{e} \qquad 0 \leq \widetilde{u} \wedge U \leq \widetilde{u} \vee U\,,$$

otteniamo che

$$\int_J V\widetilde{u}^2 + \int_J vU^2 \geq \int_J V(\widetilde{u} \wedge U)^2 + \int_J v(\widetilde{u} \vee U)^2\,,$$

e di conseguenza

$$\int_J V\widetilde{u}^2 + \int_J vU^2 = \int_J V(\widetilde{u} \wedge U)^2 + \int_J v(\widetilde{u} \vee U)^2\,.$$

In particolare,

$$\frac{1}{2}\int_I \big(u'\big)^2 + \frac{1}{2}\int_I Vu^2 - \int_I fu = \frac{1}{2}\int_I \big((u \wedge U)'\big)^2 + \frac{1}{2}\int_I V(u \wedge U)^2 - \int_I f(u \wedge U)$$

$$\frac{1}{2}\int_J \big(U'\big)^2 + \frac{1}{2}\int_J vU^2 - \int_J fU = \frac{1}{2}\int_J \big((\widetilde{u} \vee U)'\big)^2 + \frac{1}{2}\int_J v(\widetilde{u} \vee U)^2 - \int_J f(\widetilde{u} \vee U)\,,$$

e siccome u ed U sono gli unici minimi di questi funzionali, otteniamo che $u = u \wedge U$ e $U = \widetilde{u} \vee U$. □