Esercizi

Principio del massimo

Esercizio 1. *Siano I intervallo aperto e limitato, $V \in L^1(I)$ ed $f \in L^2(I)$. Sia u la soluzione debole di*

$$-u'' + Vu = f \quad in \quad I\,, \qquad u \in H^1_0(I)\,.$$

Mostrare che se $V \geq 0$ e $f \geq 0$ in I, allora $u \geq 0$ su I.

Esercizio 2. *Siano $I \subset J$ due intervalli aperti e limitati. Siano $V \in L^1(J)$ e $v \in L^1(I)$ due funzioni non-negative e tali che*

$$v \leq V \quad su \quad I.$$

Data una funzione non-negativa $f \in L^2(J)$, consideriamo le soluzioni deboli U e u di

$$-U'' + vU = f \quad in \quad J\,, \qquad U \in H^1_0(J)\,;$$

$$-u'' + Vu = f \quad in \quad I\,, \qquad u \in H^1_0(I)\,.$$

Mostrare che $U \geq u$.

Potenziali generalizzati

Esercizio 3. *Siano I intervallo aperto e limitato ed $f \in L^2(I)$. Sia μ una misura di Borel su I con $\mu(I) < +\infty$. Mostrare che esiste un'unica funzione $u \in H^1_0(I)$ tale che*

$$\int_I u'\varphi'\,dx + \int_I u\varphi\,d\mu = \int_I f\varphi\,dx \quad per\ ogni \quad \varphi \in H^1_0(I).$$

Diremo che u è soluzione debole del problema

$$-u'' + u\mu = f \quad in \quad I\,, \qquad u \in H^1_0(I)\,.$$

Esercizio 4. *Dati $I = (-1, 1)$ e $\mu = \delta_0$, trovare la soluzione del problema*

$$-u'' + u\mu = 1 \quad in \quad I\,, \qquad u \in H^1_0(I)\,.$$

Convergenza delle soluzioni deboli

Esercizio 5. *Siano I intervallo aperto e limitato. Sia $f_n \in L^2(I)$ una successione di funzioni che converge debolmente in $L^2(I)$ ad $f \in L^2(I)$. Sia V_n una successione di funzioni non-negative in $L^2(I)$ che converge debolmente in $L^2(I)$ ad una funzione $V \in L^2(I)$. Sia u la soluzione debole di*

$$-u'' + Vu = f \quad in \quad I\,, \qquad u \in H^1_0(I)\,,$$

e, per ogni $n \geq 1$, sia u_n la soluzione debole di

$$-u_n'' + V_n u_n = f_n \quad in \quad I\,, \qquad u_n \in H^1_0(I)\,.$$

Mostrare che $u_n \to u$ fortemente in $H^1_0(I)$.

Un problema che ammette soluzione debole, ma non soluzione forte

Esercizio 6. *Sia $I = (-1, 1)$. Consideriamo una successione V_n di funzioni non-negative e tali che:*

(a) *per ogni $n \geq 1$, $V_n \in L^1(I)$, ma $V_n \notin L^2(I)$;*

(b) *per ogni $n \geq 1$, V_n è supportata nell'intervallo $\big(-1/2, 1/2\big)$;*

(c) *$V_n \to 0$ fortemente in $L^1(I)$.*

Per ogni $n \geq 1$, consideriamo la soluzione debole u_n del problema

$$-u_n'' + V_n u_n = 1 \quad in \quad I \ , \qquad u_n \in H_0^1(I).$$

1. *Mostrare che la successione u_n è limitata in $H_0^1(I)$.*
2. *Mostrare che u_n converge debolmente in H^1 e fortemente in L^∞ alla soluzione u del problema*

$$-u'' = 1 \quad in \quad I \ , \qquad u \in H_0^1(I).$$

3. *Trovare u.*
4. *Mostrare che per n abbastanza grande $u_n V_n \notin L^2(I)$ e dedurre che $u_n \notin H^2(I)$.*

Problemi con condizioni di Dirichlet

Sia $I = (a, b)$ un intervallo aperto e limitato in $\mathbb{R}$. Sia $V \in L^1(I)$ una funzione non-negativa e sia $f \in L^2(I)$. Diciamo che u è soluzione debole dell'equazione

$$-u'' + Vu = f \quad \text{in} \quad I, \tag{1}$$

se

$$\int_I u'\varphi'\,dx + \int_I Vu\varphi\,dx = \int_I \varphi f \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in H_0^1(I).$$

Date due costanti, $S, T \in \mathbb{R}$, diciamo che u è soluzione debole del problema

$$-u'' + Vu = f \quad \text{in} \quad I \ , \quad u(a) = S \ , \quad u(b) = T \ , \tag{2}$$

se $u \in H^1(I)$ è soluzione dell'equazione (1) e se $u(a) = S$ e $u(b) = T$.

Esercizio 7. *Mostrare che esiste al più una soluzione debole di* (2).

Esercizio 8. *Mostrare che esiste una funzione*

$$u \in H^1(I) \ , \quad u(a) = S \ , \quad u(b) = T \ ,$$

che minimizza il funzionale

$$\mathcal{F}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_I (\varphi')^2\,dx + \frac{1}{2}\int_I V\varphi^2\,dx - \int_I f(x)\varphi(x) \ ,$$

fra tutte le funzioni

$$\varphi \in H^1(I) \ , \quad \varphi(a) = S \ , \quad \varphi(b) = T \ .$$

Mostrare che u sia soluzione debole del problema (2).

Problemi con condizioni di Neumann al bordo

Sia $I = (a, b)$ un intervallo aperto e limitato in $\mathbb{R}$. Sia $V \in L^1(I)$ una funzione non-negativa e sia $f \in L^2(I)$. Diciamo che u è soluzione debole del problema di Neumann

$$-u'' + Vu = f \quad \text{in} \quad I\,, \qquad u'(a) = u'(b) = 0 \tag{3}$$

se

$$\int_I u'\varphi'\,dx + \int_I Vu\varphi\,dx = \int_I \varphi f \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in H^1(I).$$

Esercizio 9. *Mostrare che se u e v sono due soluzioni deboli di (3), allora*

$$u - v \equiv cost \quad su \quad I.$$

In particolare, esiste al più una soluzione debole u tale che

$$\int_I u(x)\,dx = 0.$$

Esercizio 10. *Mostrare che se $V \in L^2(I)$ ed u è una soluzione debole di (3), allora*

$$u \in H^2(I) \qquad e \qquad u'(a) = u'(b) = 0.$$

Esercizio 11. *Mostrare che esiste una funzione*

$$u \in H^1(I)\,, \quad \int_I u(x)\,dx = 0$$

che minimizza il funzionale

$$\mathcal{F}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_I (\varphi')^2\,dx + \frac{1}{2}\int_I V\varphi^2\,dx - \int_I f(x)\varphi(x)\,,$$

fra tutte le funzioni

$$\varphi \in H^1(I)\,, \quad \int_I \varphi(x)\,dx = 0.$$

Mostrare che u è soiluzione debole del problema (3).

Un problema con condizioni miste

Esercizio 12. *Sia $I = (a, b)$ un intervallo aperto e limitato in $\mathbb{R}$. Sia $V \in L^2(I)$ una funzione non-negativa e sia $f \in L^2(I)$. Mostrare che esiste un'unica funzione $u \in H^2(I)$ tale che*

$$-u'' + Vu = f \quad in \quad I\,, \quad u(a) = 0\,, \quad u'(b) = 0\,.$$

Inoltre, mostrare che se $f \geq 0$, allora $u \geq 0$.

Un problema con condizione di Robin

Esercizio 13. *Sia $I = (a, b)$ un intervallo aperto e limitato in $\mathbb{R}$. Sia $V \in L^2(I)$ una funzione non-negativa e sia $f \in L^2(I)$. Mostrare che esiste un'unica funzione $u \in H^2(I)$ tale che*

$$-u'' + Vu = f \quad in \quad I\,, \quad u'(a) = u(a) \quad e \quad u'(b) = 0\,.$$

Inoltre, mostrare che se $f \geq 0$, allora $u \geq 0$.

Un problema variazionale

Esercizio 14. *Sia $I = (a, b)$ un intervallo aperto e limitato in $\mathbb{R}$. Mostrare che per ogni $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ e p dispari, esistono una funzione $u \in C^2(I) \cap C_0(I)$ ed un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale per cui*

$$-u'' + u^p = \lambda u \quad in \quad I\ , \qquad u > 0 \quad in \quad I\ , \qquad u(a) = u(b) = 0\,.$$

Un problema con condizioni all'infinito

Esercizio 15. *Mostrare che per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ esiste un'unica funzione $u \in H^2(\mathbb{R})$ tale che*

$$-u'' + u = f \quad in \quad \mathbb{R}\ , \qquad \lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to-\infty} u(x) = 0\,.$$

(a) *Mostrare che se f è continua, allora $u \in C^2(\mathbb{R})$.*

(b) *Mostrare che*

$$\lim_{x\to+\infty} u'(x) = \lim_{x\to-\infty} u'(x) = 0\,.$$

(c) *Mostrare che se $f \geq 0$, allora $u \geq 0$.*

(d) *Mostrare che se $f > 0$, allora $u > 0$.*

Problema di Bernoulli in 1D

Esercizio 16. *Siano $I = (0, +\infty)$ e $Q : I \to \mathbb{R}$ una funzione positiva in $L^\infty(I)$. Per ogni $\varphi \in H^1(I)$ definiamo*

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_I \Big((\varphi')^2 + Q(x)\mathbb{1}_{\{\varphi>0\}} \Big)\, dx.$$

(a) *Mostrare che se esiste $\varepsilon > 0$ tale per cui*

$$Q \geq \varepsilon \quad su \quad I$$

allora il problema variazionale

$$\min \Big\{ \mathcal{F}(\varphi) \ :\ \varphi \in H^1(I),\ \varphi(0) = 1 \Big\}$$

ha una soluzione u.

(b) *Trovare la soluzione u nel caso $Q \equiv 1$.*

Problema dell'ostacolo in 1D

Esercizio 17. *Siano $I = (0, +\infty)$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione positiva in $L^\infty(I)$. Per ogni $\varphi \in H^1(I)$ definiamo*

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_I \Big((\varphi')^2 + f(x)\varphi \Big)\, dx.$$

(a) *Mostrare che esiste una soluzione u del problema variazionale*

$$\min \Big\{ \mathcal{F}(\varphi) \ :\ \varphi \in H^1(I),\ \varphi(0) = 1,\ \varphi \geq 0 \ in\ I \Big\}.$$

(b) *Mostrare che la soluzione u è unica.*

(c) *Trovare la soluzione u nel caso $f \equiv 1$.*