Gli spazi $W_0^{1,p}(I)$

Lo spazio $W_0^{1,p}(I)$

Dato un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$, definiamo lo spazio $W_0^{1,p}(I)$ come la chiusura di $C_c^\infty(I)$ rispetto la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$. Osserviamo che allo stesso tempo

$$W_0^{1,p}(I) \subset W^{1,p}(I) \qquad \text{e} \qquad W_0^{1,p}(I) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

Teorema 1. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $p \in [1, +\infty]$.*
Data una funzione $u \in W^{1,p}(I)$, sono equivalenti:

(1) $u \in W_0^{1,p}(I)$;

(2) $u = 0$ *su* ∂I.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2). Segue dal teorema di aprrossimazione e dal fatto che la convergenza forte $W^{1,p}$ implica la convergenza uniforme su I.
(2) $\Rightarrow$ (1). Sia $G_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni di Sobolev tale che

- $G_k(x) \to x$ uniformemente su $\mathbb{R}$ per $k \to +\infty$;
- per ogni k, G_k è una funzione in $C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$$G_k \equiv 0 \quad \text{su} \quad \big[-1/k, 1/k\big].$$

Consideriamo ora una successione u_n di funzioni $C^\infty(I) \cap W^{1,p}(I)$ che converge fortemente in $W^{1,p}(I)$ alla funzione u. Fissato $k \geq 1$, abbiamo che

$$G_k(u_n) \to G_k(u) \quad \text{fortemente in} \quad W^{1,p}(I).$$

D'altra parte, siccome $u_n \to u$ uniformemente e siccome $|u| \leq \frac{1}{k}$ vicino agli estremi ∂I, abbiamo che per n abbastabnza grande le funzioni $G_k(u_n)$ sono a supporto compatto in I. Quindi, per definizione

$$G_k(u) \in W_0^{1,p}(I).$$

Ora, mandando $k \to +\infty$, otteniamo che

$$\lim_{k \to +\infty} G_k(u) = u \in W_0^{1,p}(I).$$

□

Teorema 2. *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $p \in [1, +\infty]$.*
Data una funzione $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, sono equivalenti:

(1) $u \in W_0^{1,p}(I)$;

(2) $u = 0$ *su* $\mathbb{R} \setminus I$.

Dimostrazione. Per esercizio. □