

Teorema di Hahn-Banach

Teorema 1 (Hahn-Banach). *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach. Siano V un sottospazio vettoriale di $\mathcal{B}$, $C > 0$ una costante e $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che*

$$|T(v)| \leq C\|v\|_{\mathcal{B}} \quad \text{per ogni } v \in V.$$

Allora, esiste un'applicazione lineare continua $S : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- (1) $S(v) = T(v)$ per ogni $v \in V$;
- (2) $|S(b)| \leq C\|b\|_{\mathcal{B}}$ per ogni $b \in \mathcal{B}$.

Corollario 2. *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach. Per ogni elemento $b \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$, esiste un'applicazione lineare continua $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $T(b) = 1$.*

Teorema 3 (Hahn-Banach II). *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach e sia V un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathcal{B}$. Allora, esiste un funzionale lineare, continuo e non-nullo*

$$T : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$T(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in V.$$

IL LEMMA PRINCIPALE

Lemma 4. *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach. Siano V un sottospazio vettoriale di $\mathcal{B}$, $C > 0$ una costante e $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che*

$$|T(v)| \leq C\|v\|_{\mathcal{B}} \quad \text{per ogni } v \in V.$$

Dato un elemento $z \in \mathcal{B} \setminus V$, consideriamo lo spazio vettoriale W generato da V e z :

$$W := \left\{ u + \alpha z : u \in V, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Allora, esiste un'applicazione lineare continua $S : W \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- (1) $S(v) = T(v)$ per ogni $v \in V$;
- (2) $|S(w)| \leq C\|w\|_{\mathcal{B}}$ per ogni $w \in W$.

Dimostrazione. Per ogni $w = v + \alpha z$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, definiamo

$$S(w) = T(v) + \alpha S(z),$$

dove la costante $S(z)$ sarà definita in seguito in modo tale d'avere

$$|S(w)| \leq C\|w\|_{\mathcal{B}} \quad \text{per ogni } w \in W.$$

Per ogni $u, v \in V$ ed ogni $\alpha, \beta > 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} T(\alpha u + \beta v) &\leq C\|\alpha u + \beta v\|_{\mathcal{B}} \\ &= C\|\alpha(u - \beta z) + \beta(v + \alpha z)\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq C\|\alpha(u - \beta z)\|_{\mathcal{B}} + C\|\beta(v + \alpha z)\|_{\mathcal{B}} \\ &= C\alpha\|u - \beta z\|_{\mathcal{B}} + C\beta\|v + \alpha z\|_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

che possiamo scrivere anche come

$$\alpha\left(T(u) - C\|u - \beta z\|_{\mathcal{B}}\right) \leq -\beta\left(T(v) - C\|v + \alpha z\|_{\mathcal{B}}\right),$$

o ancora

$$\frac{1}{\beta}\left(T(u) - C\|u - \beta z\|_{\mathcal{B}}\right) \leq -\frac{1}{\alpha}\left(T(v) - C\|v + \alpha z\|_{\mathcal{B}}\right).$$

Siccome $u, v \in V$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ sono arbitrari, abbiamo che esiste $s \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\sup_{u \in V, \beta > 0} \left\{ \frac{1}{\beta} \left(T(u) - C\|u - \beta z\|_{\mathcal{B}} \right) \right\} \leq s \leq \inf_{v \in V, \alpha > 0} \left\{ -\frac{1}{\alpha} \left(T(v) - C\|v + \alpha z\|_{\mathcal{B}} \right) \right\}.$$

Definiamo

$$S(z) = s.$$

Per costruzione, abbiamo che:

$$S(u - \beta z) = T(u) - \beta s \leq C\|u - \beta z\|_{\mathcal{B}} \quad \text{per ogni} \quad u \in V, \beta > 0;$$

$$S(v + \alpha z) = T(v) + \alpha s \leq C\|v + \alpha z\|_{\mathcal{B}} \quad \text{per ogni} \quad v \in V, \alpha > 0.$$

il che conclude la dimostrazione. □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1 IN UNO SPAZIO SEPARABILE

Supponiamo che $\mathcal{B}$ è separabile, ovvero che esiste un sottoinsieme denso numerabile $\mathcal{C} = \{\phi_n\}_{n \geq 1}$ di $\mathcal{B}$. Consideriamo la successione di spazi:

$$V_0 := V, \quad T_0 = T : V_0 \rightarrow V;$$

$$V_n := \begin{cases} V_{n-1} & \text{se } \phi_n \in V_{n-1}; \\ \left\{ u + \alpha \phi_n : u \in V_{n-1}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} & \text{se } \phi_n \notin V_{n-1}. \end{cases}$$

e mappe

$$T_n : V_n \rightarrow \mathbb{R}$$

costruite nel Lemma 4. Allora, per ogni $n \geq k$ si ha:

$$V_k \subset V_n \quad \text{e} \quad T_k = T_n \quad \text{su} \quad V_k.$$

Sullo spazio vettoriale

$$V_\infty := \bigcup_{n \geq 1} V_n,$$

definiamo la mappa

$$T_\infty : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$$

come

$$T_\infty(u) = T_k(u) \quad \text{per} \quad u \in V_k.$$

Per costruzione

$$|T_\infty(u)| \leq C\|u\|_{\mathcal{B}} \quad \text{per ogni } u \in V_\infty.$$

Inoltre, V_∞ è un sottospazio denso di $\mathcal{B}$. Per ogni $u \in \mathcal{B}$ definiamo $T(u)$ come

$$T(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_\infty(u_n)$$

per una qualsiasi successione

$$u_n \in V_\infty \quad \text{con} \quad \|u_n - u\|_{\mathcal{B}} = 0.$$

Allora, T è una mappa lineare e continua su $\mathcal{B}$ e

$$|T(u)| \leq C\|u\|_{\mathcal{B}} \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{B},$$

il che conclude la dimostrazione. □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1 NEL CASO GENERALE

Consideriamo la famiglia $\mathcal{X}$ di coppie spazio-mappa (W, S) tali che:

- $V \subset W \subset \mathcal{B}$;
- $S : W \rightarrow \mathbb{R}$ è una mappa lineare limitata tale che

$$|S(w)| \leq C\|w\|_{\mathcal{B}} \quad \text{per ogni } w \in W;$$

- $S \equiv T$ su V .

Su $\mathcal{X}$ consideriamo la relazione d'ordine $(W_1, S_1) \leq (W_2, S_2)$, se:

$$W_1 \subset W_2 \subset \mathcal{B} \quad \text{e} \quad S_2 \equiv S_1 \quad \text{su } W_1.$$

Data una catena $\mathcal{C}$ in $\mathcal{X}$, consideriamo la coppia $(W_\infty, S_\infty) \in \mathcal{X}$ definita come

$$W_\infty := \bigcup_{(W, S) \in \mathcal{C}} W; \quad S_\infty(w) := S(w) \quad \text{per ogni } w \in W \quad \text{ed ogni } (W, S) \in \mathcal{C}.$$

Per costruzione, (W_∞, S_∞) è un maggiorante di $\mathcal{C}$. Allora, per il Lemma di Zorn, esiste un elemento massimale

$$(W_{max}, S_{max}) \in \mathcal{X}.$$

Infine, per il Lemma 4 si ha che necessariamente $W_{max} = \mathcal{B}$. □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3

Sia z un qualsiasi elemento in $\mathcal{B} \setminus V$. Siccome V è chiuso esiste un raggio $\varepsilon > 0$ tale che

$$B_\varepsilon(z) \subset \mathcal{B} \setminus V.$$

Sia W lo spazio generato da V e z :

$$W = \left\{ v + \alpha z : v \in V, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definiremo un funzionale lineare e limitato S su W tale che

$$S(z) \neq 0 \quad \text{e} \quad S(v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in V.$$

D'ora in poi procederemo esattamente come nella dimostrazione del Lemma 4. Per ogni

$$w = v + \alpha z \in W,$$

definiamo

$$S(w) = \alpha S(z).$$

Per scegliere il valore di $S(z)$ osserviamo che, siccome $B_\varepsilon(z) \cap V = \emptyset$, abbiamo che

$$\inf_{v \in V} \|v - z\| \geq \varepsilon.$$

Quindi scegliendo

$$S(z) = \varepsilon > 0,$$

otteniamo che per ogni $\alpha > 0$ abbiamo

$$S(v + \alpha z) = \alpha S(z) = \alpha \varepsilon \leq \alpha \left\| \frac{1}{\alpha} v + z \right\|_{\mathcal{B}} = \|v + \alpha z\|_{\mathcal{B}}$$

e analogamente

$$S(v - \alpha z) = -\alpha S(z) = -\alpha \varepsilon \geq -\alpha \left\| \frac{1}{\alpha} v - z \right\|_{\mathcal{B}} = -\|v - \alpha z\|_{\mathcal{B}}.$$

Di conseguenza, otteniamo la seguente stima per ogni α reale:

$$|S(v + \alpha z)| \leq \|v + \alpha z\|_{\mathcal{B}} \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Quindi,

$$|S(w)| \leq \|w\|_{\mathcal{B}} \quad \text{per ogni } w \in W.$$

Ora, per il primo teorema di Hahn-Banach (Teorema 1), possiamo estendere S ad un funzionale lineare continuo $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$. □