

Disuguaglianze di Clarkson

DISUGUAGLIANZA DI CLARKSON NEL CASO $p \geq 2$

Proposizione 1. Sia $p \geq 2$ un numero reale. Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si ha

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{|a|^p}{2} + \frac{|b|^p}{2}.$$

Dimostrazione.

Step 1. Dimostrare che

$$1 + t^p \leq (1 + t^2)^{p/2} \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Step 2. Dimostrare che

$$x^p + y^p \leq (x^2 + y^2)^{p/2} \quad \text{per ogni } x, y \geq 0.$$

Step 3. Prendendo $x = \frac{a+b}{2}$ e $y = \frac{a-b}{2}$, dimostrare che

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{|a|^p}{2} + \frac{|b|^p}{2},$$

per ogni $a, b \geq 0$.

Step 4. Concludere studiando il segno di a e b . □

DISUGUAGLIANZA DI CLARKSON NEL CASO $p \leq 2$

Proposizione 2. Sia $p \in (1, 2]$ un numero reale. Allora, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, si ha

$$|a+b|^p + |a-b|^p \leq 2(|a|^p + |b|^p).$$

Dimostrazione.

Step 1. Dimostrare che

$$1 + t^p - (1 + t^2)^{p/2} \geq 0 \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Step 2. Dimostrare che

$$x^p + y^p \geq (x^2 + y^2)^{p/2} \quad \text{per ogni } x, y \geq 0.$$

Step 3. Prendendo $x = \frac{u+v}{2}$ e $y = \frac{u-v}{2}$, dimostrare che

$$\left| \frac{u+v}{2} \right|^p + \left| \frac{u-v}{2} \right|^p \geq \frac{|u|^p}{2} + \frac{|v|^p}{2},$$

per ogni $u, v \in \mathbb{R}$.

Step 4. Concludere prendendo $u = \frac{a+b}{2}$ e $v = \frac{a-b}{2}$. □