Convergenza debole

Convergenza debole in $L^p(\Omega)$ ed in spazi di Banach

Siano $p \in (1,+\infty)$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile secondo Lebesgue. Diciamo che una successione $f_n \in L^p(\Omega)$ converge debolmente a $f \in L^p(\Omega)$ (e scriviamo $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$), se:

$$\int_\Omega f_n(x)g(x)\,dx \to \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \qquad \text{per ogni} \qquad g \in L^q(\Omega),$$

dove, come al solito,

$$q := \frac{p}{p-1}.$$

Più in generale, dato uno spazio di Banach $\mathcal{B}$, diciamo che una successione $u_n \in \mathcal{B}$ converge debolmente a $u \in \mathcal{B}$ (e scriviamo $u_n \rightharpoonup u$), se

$$T(u_n) \to T(u) \qquad \text{per ogni} \qquad T \in \mathcal{B}',$$

dove $\mathcal{B}'$ è lo spazio duale di $\mathcal{B}$.

Inoltre, diremo che una successione $u_n \in \mathcal{B}$ converge fortemente a $u \in \mathcal{B}$ (e scriviamo $u_n \to u$), se

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{\mathcal{B}} = 0\,.$$

Unicità del limite debole in $L^p(\Omega)$

Osserviamo che se una successione $u_n \in L^p(\Omega)$ converge debolmente, allora il limite debole è univocamente determinato. Infatti, supponiamo che esistono due funzioni $u, v \in L^p(\Omega)$ tali che:

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{e} \qquad u_n \rightharpoonup v.$$

Allora, per ogni funzione $\varphi \in L^q(\omega)$, abbiamo che

$$\int_\Omega u\varphi\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n\varphi\,dx = \int_\Omega v\varphi\,dx,$$

e quindi

$$\int_\Omega (u-v)\varphi\,dx = 0.$$

Scegliendo $\varphi = (u-v)|u-v|^{p-2}$, otteniamo che

$$\int_\Omega |u-v|^p\,dx = 0,$$

e quindi $u = v$.

Unicità del limite debole in uno spazio di Banach

Anche in uno spazio di Banach è vero che il limite debole è univocamente determinato. Infatti, se $u_n \in \mathcal{B}$ è una successione tale che converge debolmente in $\mathcal{B}$ a due elementi $u, v \in \mathcal{B}$:

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{e} \qquad u_n \rightharpoonup v,$$

allora, per ogni funzionale lineare continuo $T : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ si ha che

$$T(u) = \lim_{n\to\infty} T(u_n) = T(v),$$

e quindi

$$T(u-v).$$

Ora, per il teorema di Hahn-Banach, abbiamo che se $u - v \neq 0$, allora esiste un funzionale lineare continuo $T : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ tale che $T(u-v) = 1$. Di conseguienza, si ha che necessariamente $u = v$.

Due osservazioni importanti

Proposizione 1 (Convergenza forte $\Rightarrow$ convergenza debole)**.** *Se u_n è una successione in uno spazio di Banach $\mathcal{B}$ che converge fortemente a $u \in \mathcal{B}$, allora u_n converge debolmente a u.*

Proposizione 2. *Sia u_n una successione limitata in uno spazio di Banach $\mathcal{B}$. Sia $\mathcal{C}'$ un sottoinsieme denso di $\mathcal{B}'$. Allora, sono equivalenti:*

(1) *$u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $\mathcal{B}$;*

(2) *$T(u_n) \to T(u)$ per ogni $T \in \mathcal{C}$.*

Esercizi ed esempi

Esercizio 3. *Siano $p \in (1, +\infty)$ ed $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Sia x_n una successione di punti in $\mathbb{R}^d$. Per ogni $n \geq 1$, definiamo:*

$$f_n(x) := f(x - x_n).$$

(a) Se $|x_n| \to 0$, allora f_n converge ad f fortemente in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

(b) Se $|x_n| \to +\infty$, allora f_n converge a 0 debolmente in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Esercizio 4. *In $L^2([0, 1])$, consideriamo la successione*

$$u_n(x) := \begin{cases} 1 & \textit{se} \quad \frac{2k}{2n} \leq x < \frac{2k+1}{2n} \quad \textit{per un qualche} \quad 0 \leq k \leq n-1 \\ 0 & \textit{se} \quad \frac{2k+1}{2n} \leq x < \frac{2k+2}{2n} \quad \textit{per un qualche} \quad 0 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Dimostrare che u_n converge debolmente alla funzione costante $1/2$.

Esercizio 5. *In $L^2([0, \pi])$, consideriamo la successione*

$$u_n(x) := \sin(nx)$$

Dimostrare che u_n converge debolmente alla funzione costante 0.

Esercizio 6. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile. Sia ϕ_n un sistema ortonormale completo di $\mathcal{H}$. Mostrare che $\phi_n \rightharpoonup 0$ in $\mathcal{H}$.*

Esercizio 7. *Siano $p \in (1, +\infty)$ ed $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e sia $R_n \to +\infty$. Per ogni $n \geq 1$, definiamo*

$$f_n(x) := \frac{1}{R_n^{d/p}} f\left(x/R_n\right).$$

Dimostrare che $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Compattezza debole delle successioni limitate.

Teorema 8. *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach separabile (ossia $\mathcal{B}$ contiene un insieme denso numerabile $\mathcal{C}$). Sia T_n una successione limitata in $\mathcal{B}'$:*

$$\|T_n\|_{\mathcal{B}'} \leq L \qquad \textit{per ogni} \qquad n \geq 1.$$

Allora, possiamo trovare una sottosuccessione T_{n_k} ed un operatore lineare continuo $T \in \mathcal{B}'$ tali che

$$T_n(x) \to T(x) \quad \textit{per ogni} \quad x \in \mathcal{B}.$$

Dimostrazione. Sia

$$\mathcal{C} := \Big\{ x_j \ : \ j \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Siccome $\mathcal{C}$ è numerabile, possiamo supporre (a meno di estrarre una sottosuccessione) che $T_n(x_j)$ converge (per $n \to +\infty$). Definiamo

$$T(x_j) := \lim_{n\to+\infty} T_n(x_j).$$

Ora, sia $x \in \mathcal{B}$ un qualsiasi elemento di $\mathcal{B}$. Dimostreremo che $T_n(x)$ è di Cauchy. Infatti, per ogni $x_j \in \mathcal{C}$ abbiamo che

$$\begin{aligned} |T_n(x) - T_m(x)| &\le |T_n(x) - T_n(x_j)| + |T_n(x_j) - T_m(x_j)| + |T_m(x) - T_m(x_j)| \\ &\le 2L|x - x_j| + |T_n(x_j) - T_m(x_j)|. \end{aligned}$$

Quindi, siccome $\mathcal{C}$ è denso, anche la successione $T_n(x)$ è di Cauchy. Quindi, possiamo definire

$$T(x) := \lim_{n\to+\infty} T_n(x).$$

Per costruzione, la mappa

$$T : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$$

è lineare. Inoltre, siccome

$$|T(x)| = \lim_{n\to+\infty} |T_n(x)| \le L|x|,$$

abbiamo che T è anche limitata. □

Corollario 9. *In uno spazio di Hilbert separabile, ogni successione limitata ammette una sottosuccessione debolmente convergente.*

Corollario 10. *Siano $p \in (1, +\infty)$ ed Ω un insieme misurabile in $\mathbb{R}^d$. Allora, ogni successione limitata $f_n \in L^p(\Omega)$ ammette una sottosuccessione debolmente convergente in $L^p(\Omega)$.*

Semicontinuità della norma $L^p(\Omega)$

Teorema 11. *Siano $p \in (1, +\infty)$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Sia $f_n \in L^p(\Omega)$ una successione che converge debolmente ad una certa funzione $f \in L^p(\Omega)$. Allora*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \sup \Big\{ \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \ : \ v \in L^q(\Omega)\,,\ \|v\|_{L^q(\Omega)} = 1 \Big\}.$$

Inoltre, prendendo

$$g := \frac{1}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^{p-1}} f|f|^{p-2},$$

abbiamo che

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \|g\|_{L^q(\Omega)} = 1.$$

Quindi

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)g(x)\,dx \le \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

□

Osserviamo anche che vale il teorema seguente:

Teorema 12. *Siano $p \in (1, +\infty)$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Sia $f_n \in L^p(\Omega)$ una successione che converge debolmente. Allora, la successione $\|f_n\|_{L^p(\Omega)}$ è limitata.*

Teorema di Radon-Riesz

Teorema 13 (Dimostrazione nel caso $p \geq 2$.)**.** *Siano $p \in (1, +\infty)$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Siano $f_n \in L^p(\Omega)$ una successione ed $f \in L^p(\Omega)$ una funzione. Allora, sono equivalenti:*

(1) *$f_n \rightharpoonup f$ e $\|f_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|f\|_{L^p(\Omega)}$;*

(2) *$f_n \to f$ fortemente in $L^p(\Omega)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che (1) implica (2) nel caso $p = 2$. Infatti,

$$\|f_n - f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega f_n^2 \, dx - \int_\Omega f_n^2 \, dx + 2 \int_\Omega (f - f_n) f \to 0.$$

Supponiamo ora che $p \geq 2$. Per la disuguaglianza di Clarkson,

$$\left\| \frac{f_n - f}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \frac{1}{2} \|f_n\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2} \|f\|_{L^p(\Omega)}^p - \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p$$

Siccome $\frac{1}{2}(f_n + f) \rightharpoonup f$, abbiamo che

$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \liminf_{n \to +\infty} \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \to +\infty} \left\| \frac{f_n - f}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p &\leq \limsup_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2} \|f_n\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{1}{2} \|f\|_{L^p(\Omega)}^p - \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right) \\
&\leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^p - \liminf_{n \to +\infty} \left\| \frac{f_n + f}{2} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \\
&\leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^p - \|f\|_{L^p(\Omega)}^p = 0.
\end{aligned}$$

□

Convergenza debole e convergenza forte

Proposizione 14. *Sia Ω un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^d$. Siano $p \in (1, +\infty)$ e $q := \frac{p}{p-1}$.*
Sia f_n una successione in $L^p(\Omega)$ che converge fortemente a $f \in L^p(\Omega)$.
Sia g_n una successione in $L^q(\Omega)$ che converge debolmente a $g \in L^q(\Omega)$.
Allora

$$\int_\Omega f(x) g(x) \, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n(x) g_n(x) \, dx.$$

Dimostrazione. La tesi segue dall'identità

$$\int_\Omega \Big(f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x) \Big) \, dx = \int_\Omega \big(f_n(x) - f(x) \big) g_n(x) \, dx + \int_\Omega \big(g_n(x) - g(x) \big) f(x) \, dx.$$

□

Esercizi

Esercizio 15. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Se $x_n \to x$ in $\mathcal{H}$ e $y_n \rightharpoonup y$ in $\mathcal{H}$, allora*

$$< x, y >= \lim_{n\to\infty} < x_n, y_n > .$$

Esercizio 16. *Sia $\Omega = [0,1]$. Trovare due successioni di funzioni in $L^2(\Omega)$ tali che:*

- *f_n converge debolmente a $f \in L^2(\Omega)$;*
- *g_n converge debolmente a $g \in L^2(\Omega)$;*
- $\displaystyle\int_\Omega f(x)g(x)\,dx \neq \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)g_n(x)\,dx.$

Esercizio 17. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile e $p \in (1,+\infty)$. Dimostrare che se $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$ e $v \in L^\infty(\Omega)$, allora $u_n v \rightharpoonup uv$ in $L^p(\Omega)$.*

Esercizio 18. *Sia $p \in (1,+\infty)$. Dimostrare che se $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, allora $u_n * \varphi \rightharpoonup u * \varphi$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Esercizio 19. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile e siano $p, q, r \in (1,+\infty)$ tali che $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Dimostrare che se $u_n \to u$ fortemente in $L^p(\Omega)$ e $v_n \rightharpoonup v$ debolmente in $L^q(\Omega)$, allora $u_n v_n \rightharpoonup uv$ debolmente in $L^r(\mathbb{R}^d)$.*

Esercizio 20. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile e siano $p, q, r \in (1,+\infty)$ tali che $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. È vero che se $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $L^p(\Omega)$ e $v_n \rightharpoonup v$ debolmente in $L^q(\Omega)$, allora $u_n v_n \rightharpoonup uv$ debolmente in $L^r(\mathbb{R}^d)$?*

Esercizio 21. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile e siano $p, q, r \in (1,+\infty)$ tali che $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. È vero che se $u_n \rightharpoonup 0$ debolmente in $L^p(\Omega)$ e $v_n \rightharpoonup 0$ debolmente in $L^q(\Omega)$, allora $u_n v_n \rightharpoonup 0$ debolmente in $L^r(\mathbb{R}^d)$?*

Esercizio 22. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile e limitato. Sia $u_n \in L^2(\Omega)$ una successione di funzioni tali che $0 \le u_n \le 1$ su Ω. Dimostrare che se u_n converge debolmente a 0 in $L^2(\Omega)$, allora u_n converge fortemente a zero in $L^2(\Omega)$.*

Esercizio 23. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile e $p \in (1,+\infty)$. È vero che se $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$, allora esiste una sottosuccessione di u_n che converge puntualmente quasi-ovunque a u?*

Esercizio 24. *Siano $p \in (2,+\infty)$ e $u_n \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ una successione che converge debolmente in $L^p(\mathbb{R}^d)$ ad una funzione $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Dimostrare che sono equivalenti:*

(1) $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$;

(2) u_n converge debolmente in $L^2(\mathbb{R}^d)$ ad una qualche funzione $v \in L^2(R^d)$;

(3) $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ed u_n converge debolmente in $L^2(\mathbb{R}^d)$ ad u.