Le successioni debolmente convergenti sono limitate

Teorema 1. *Sia $\mathcal{B}$ uno spazio di Banach. Sia $u_n \in \mathcal{B}$ una successione debolmente convergente. Allora, la successione $\|u_n\|_{\mathcal{B}}$ è limitata.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che esiste una successione u_n debolmente convergente, ma non limitata. Possiamo supporre che:

$$u_n \rightharpoonup 0\ , \qquad \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{\mathcal{B}} = +\infty\ .$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un'applicazione lineare continua $T_n : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ tale che

$$T_n(u_n) = \|u_n\|_{\mathcal{B}} \qquad \text{e} \qquad \|T_n\|_{\mathcal{B}'} = \sup\Big\{T_n(u)\ :\ u \in \mathcal{B},\ \|u\|_{\mathcal{B}} = 1\Big\} = 1.$$

Costruiamo una sottosuccessione u_{n_k} tale che:

- $\|u_{n_1}\|_{\mathcal{B}} \ge 4$;
- $\|u_{n_{k+1}}\|_{\mathcal{B}} \ge \|u_{n_k}\|_{\mathcal{B}}^2$;
- $|T_{n_k}(u_{n_\ell})| \le 1$ per ogni $\ell \ge k+1$.

Per semplicità, poniamo:

$$u_k := u_{n_k}\ , \qquad T_k := T_{n_k}\ , \qquad A_k^2 := \|u_k\|_{\mathcal{B}} = T_k(u_k)\,.$$

Definiamo l'operatore

$$T := \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{A_j} T_j\ .$$

Siccome $u_k \rightharpoonup 0$, abbiamo che

$$\lim_{k\to+\infty} T(u_k) = 0.$$

D'altra parte, per costruzione, abbiamo:

$$\begin{aligned}
T(u_k) &= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{A_j} T_j(u_k) + \frac{1}{A_k} T_k(u_k) + \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{1}{A_j} T_j(u_k) \\
&\ge -\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{A_j} |T_j(u_k)| + A_k - \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{1}{A_j} |T_j(u_k)| \\
&\ge -\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{A_j} + A_k - \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{1}{A_j} |T_j| \|u_k\|_{\mathcal{B}} \\
&\ge -\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{A_j} + A_k - A_k^2 \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{1}{A_j} \\
&\ge -1 + A_k - A_k^2 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{A_{k+i}}
\end{aligned}$$

Siccome $A_{k+i} \ge A_{k+i-1}^2 \ge \dots \ge A_{k+1}^{2(i-1)} \ge A_k^{2i}$, otteniamo

$$A_k^2 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{A_{k+i}} \le A_k^2 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{A_k^{2i}} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{A_k^{2i}} = \frac{1}{1 - A_k^{-2}} < 2,$$

e quindi

$$T(u_k) \ge A_k - 3 \to +\infty,$$

il che è un assurdo. $\square$