Partizione dell'unità

Una costruzione generale

Lemma 1. *Dato un rettangolo compatto in* $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{R} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdot \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R} \ ,$$

esiste una funzione

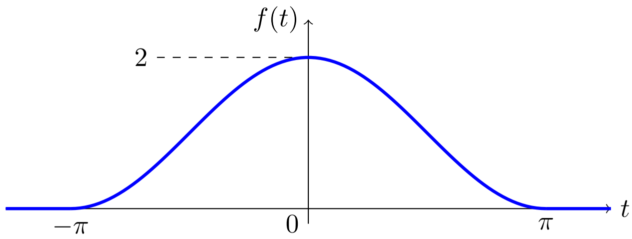
$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

con le proprietà seguenti:

- φ *è di classe* C^1 *su* $\mathbb{R}^n$ *(ovvero* φ *è continua, differenziabile in ogni punto e le sue derivate parziali sono continue);*
- $\varphi = 0$ *in* $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{R}$*;*
- $\varphi > 0$ *in* $\operatorname{int}(\mathcal{R})$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \le -\pi \\ 1 + \cos t & \text{se} \quad -\pi \le t \le \pi \\ 0 & \text{se} \quad t \ge \pi \end{cases}$$

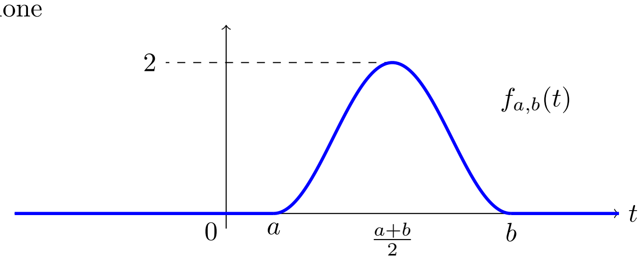


La funzione f è positiva in $(-\pi, \pi)$ e di classe C^1 su $\mathbb{R}$. Infatti,

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \le -\pi \\ -\sin t & \text{se} \quad -\pi \le t \le \pi \\ 0 & \text{se} \quad t \ge \pi \end{cases}$$

Per ogni coppia di punti $a < b$, consiederiamo la funzione

$$f_{a,b}(t) = f\left(\frac{2\pi}{a+b}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)\right)$$



La funzione $f_{a,b}$ è positiva in (a, b), zero in $\mathbb{R} \setminus (a, b)$ ed è (come f) di classe C^1 su $\mathbb{R}$. Definiamo ora φ come il prodotto

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) := f_{a_1,b_1}(x_1)\, f_{a_2,b_2}(x_2) \dots f_{a_n,b_n}(x_n).$$

□

Domini di classe C^1 in $\mathbb{R}^d$

Definizione 2. *Diciamo che* $D \subset \mathbb{R}^n$ *è un dominio* C^1*, se* D *è un insieme compatto e se per ogni punto*

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \partial D,$$

esistono:

- *un rettangolo* $\mathcal{R}_X = \big[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1\big] \times \big[x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2\big] \times \cdots \times \big[x_n - \delta_n, x_n + \delta_n\big]$;

- *un indice* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *(per semplicità supponiamo che* $i = n$*) ed una funzione*

$$\eta : \big[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1\big] \times \big[x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2\big] \times \cdots \times \big[x_{n-1} - \delta_{n-1}, x_{n-1} + \delta_{n-1}\big] \to \mathbb{R},$$

continua su

$$\big[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1\big] \times \big[x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2\big] \times \cdots \times \big[x_{n-1} - \delta_{n-1}, x_{n-1} + \delta_{n-1}\big],$$

di classe C^1 *su*

$$\big(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1\big) \times \big(x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2\big) \times \cdots \times \big(x_{n-1} - \delta_{n-1}, x_{n-1} + \delta_{n-1}\big)$$

a valori in

$$\big(x_n - \delta_n, x_n + \delta_n\big) \ ,$$

e tale che vale uno dei casi seguenti :

Caso 1. $D \cap \mathcal{R}_X = \Big\{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{R}_X \ : \ y_n \leq \eta(y_1, \ldots, y_{n-1})\Big\}$;

Caso 2. $D \cap \mathcal{R}_X = \Big\{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{R}_X \ : \ y_n \geq \eta(y_1, \ldots, y_{n-1})\Big\}$.

Osservazione 3. *L'insieme* $\mathcal{R}_X \cap D$ *è un dominio normale semplice di classe* C^1 *in* $\mathbb{R}^d$*. Infatti, se siamo nel caso 1 della definizione, possiamo prendere*

$$\mathcal{R}' = \big[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1\big] \times \cdots \times \big[x_{n-1} - \delta_{n-1}, x_{n-1} + \delta_{n-1}\big] \subset \mathbb{R}^{d-1},$$

$$v : \mathcal{R}' \to \mathbb{R}, \qquad v(Y') := \eta(Y') \quad \text{per ogni} \quad Y' = (y_1, \ldots, y_{d-1}) \in \mathcal{R}'_{X'}$$

$$u : \mathcal{R}' \to \mathbb{R}, \qquad u(Y') := x_d - \delta_d \quad \text{per ogni} \quad Y' = (y_1, \ldots, y_{d-1}) \in \mathcal{R}'_{X'} \, .$$

Quindi

$$\mathcal{R}_X \cap D = \Big\{Y = (Y', y_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \ : \ u(Y') \leq y_d \leq v(Y')\Big\}.$$

Partizione dell'unità

Teorema 4. *Dato un dominio* D *di classe* C^1 *in* $\mathbb{R}^d$ *ed un aperto* Ω *che contiene* D*, esistono una famiglia finita di rettangoli compatti*

$$\Big\{\mathcal{R}_i \ : \ i = 1, \ldots, N\Big\},$$

ed una famiglia di funzioni

$$\Big\{\psi_i : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R} \ , \ i = 1, \ldots, N\Big\} \qquad \text{dove} \qquad \widetilde{\Omega} := \bigcup_{i=1}^{N} \operatorname{int}\big(\mathcal{R}_i\big) \ ,$$

con le proprietà seguenti:

- *ogni rettangolo* $\mathcal{R}_i$ *è contenuto in* Ω *;*
- *la famiglia di rettangoli aperti* $\Big\{\operatorname{int}\big(\mathcal{R}_i\big)\Big\}_{i=1}^{N}$ *è un ricoprimento di* D*, ovvero* $D \subset \widetilde{\Omega}$*;*
- *per ogni* $i = 1, \ldots, N$*, l'insieme* $D \cap \mathcal{R}_i$ *è un dominio normale semplice di classe* C^1 *in* $\mathbb{R}^d$*;*
- *ogni funzione* ψ_i *è di classe* C^1 *su* $\widetilde{\Omega}$*;*
- $\psi_i > 0$ *in* $\mathcal{R}_i$ *e* $\psi_i = 0$ *in* $\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{R}_i$*;*
- $\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_N \equiv 1$ *su* $\widetilde{\Omega}$.

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni $X \in D$ esiste un rettangolo aperto $\mathcal{R}_X$ tale che

$$D \cap \mathcal{R}_X \quad \text{è un dominio normale semplice di classe } C^1.$$

Infatti, se il punto X è all'interno di D, allora esiste un rettangolo $\mathcal{R}_X$ strettamente contenuto in D; d'altra parte, se X è sul bordo di D, allora per definizione $D \cap \mathcal{R}_X$ è un dominio normale semplice.

Consideriamo ora la famiglia di rettangoli aperti

$$\Big\{\text{int}\big(\mathcal{R}_X\big)\Big\}_{X\in D}.$$

Per costruzione, questa famiglia è un ricoprimento aperto di D. Siccome D è (per definizione) un compatto, esiste un numero finito di rettangoli

$$\mathcal{R}_1 := \mathcal{R}_{X_1}\ , \quad \mathcal{R}_2 := \mathcal{R}_{X_2}\ , \ \dots, \ \mathcal{R}_N := \mathcal{R}_{X_N}\ ,$$

tali che

$$\Big\{\text{int}\big(\mathcal{R}_i\big)\Big\}_{i=1}^{N}$$

è un ricoprimento aperto e finito di D. Definendo

$$\widetilde{\Omega} := \bigcup_{i=1}^{N} \text{int}\big(\mathcal{R}_i\big),$$

abbiamo che

$$D \subset \widetilde{\Omega} \subset \Omega\ .$$

Ora, per ogni rettangolo $\mathcal{R}_i$ consideriamo la funzione φ_i data dal Lemma 1. Consideriamo l'aperto

$$\widetilde{\Omega} = \Omega \cup \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{R}_i.$$

Per costruzione,

$$\sum_{i=1}^{N} \varphi_i > 0 \quad \text{su} \quad \widetilde{\Omega}\,.$$

Per ogni $i = 1, \dots, N$, definiamo la funzione

$$\psi_i : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}\ , \qquad \psi_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_N}\ .$$

Allora, per costruzione

- ψ_i è di classe C^1 si $\widetilde{\Omega}$;
- $\psi_i > 0$ su $\text{int}(\mathcal{R}_i)$;
- $\psi_i = 0$ in $\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{R}_i$;
- $\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_N = 1$ in $\widetilde{\Omega}$.

□

Osservazione 5. *La famiglia di funzioni* $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ *viene a volte chiamata* **partizione dell'unità**.

Osservazione 6. *La partizione dell'unità permette di ridurre l'integrazione di una funzione su un dominio regolare all'integrazione di funzioni su domini normali semplici. Infatti, data una funzione* $F : D \to \mathbb{R}$ *limitata e integrabile su* D*, abbiamo*

$$\int_D F(X)\,dX = \int_D \Big(\sum_{i=1}^{N} \psi_i(X)F(X)\Big)\,dX = \sum_{i=1}^{N}\int_D \psi_i(X)F(X)\,dX = \sum_{i=1}^{N}\int_{\mathcal{R}_i\cap D} \psi_i(X)F(X)\,dX\,.$$