
Area del grafico di una funzione di due variabili

AREA DI UN TRIANGOLO IN \mathbb{R}^3

Definizione 1. Dato un triangolo $T_{A,B,C}$ con vertici A, B e C in \mathbb{R}^3 , definiamo l'area di $T_{A,B,C}$ come

$$\text{Area}(T_{A,B,C}) := \frac{1}{2} |(B - A) \wedge (C - A)|,$$

dove $(B - A) \wedge (C - A)$ è il prodotto vettoriale dei vettori $B - A$ e $C - A$.

AREA DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI

Sia $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ un rettangolo in \mathbb{R}^2 e sia $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che:

- F è continua su \mathcal{R} ;
- fissato $x \in [a, b]$ abbiamo che per ogni $y \in (c, d)$ esiste la derivata parziale

$$\partial_y F(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x, y+t) - F(x, y)}{t},$$

ed esistono le derivate

$$\partial_y F(x, c) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x, c+t) - F(x, c)}{t} \quad \text{e} \quad \partial_y F(x, d) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F(x, d+t) - F(x, d)}{t};$$

- fissato $y \in [c, d]$ abbiamo che per ogni $x \in (a, b)$ esiste la derivata parziale

$$\partial_x F(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+t, y) - F(x, y)}{t},$$

ed esistono le derivate

$$\partial_x F(a, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(a+t, y) - F(a, y)}{t} \quad \text{e} \quad \partial_x F(b, y) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{F(b+t, y) - F(b, y)}{t};$$

- le funzioni

$$\partial_x F : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \partial_y F : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

sono funzioni continue.

Sia $\Phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione

$$\Phi(x, y) = (x, y, F(x, y)).$$

Inoltre, consideriamo i vettori $\partial_x \Phi$ e $\partial_y \Phi$ in \mathbb{R}^3 definiti come

$$\partial_x \Phi = (1, 0, \partial_x F) \quad \text{e} \quad \partial_y \Phi = (0, 1, \partial_y F).$$

Data una partizione

$$\mathcal{P} = \left\{ R_{ij} : i = 0, \dots, n-1; j = 0, \dots, m-1 \right\}$$

di \mathcal{R} generata dalle partizioni

$$\mathcal{P}_{[a,b]} = \left\{ a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b \right\},$$

$$\mathcal{P}_{[c,d]} = \left\{ c = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m = d \right\},$$

consideriamo le somme parziali

$$\mathcal{S}(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\text{Area} \left(T_{\Phi(t_i, s_j), \Phi(t_{i+1}, s_j), \Phi(t_i, s_{j+1})} \right) + \text{Area} \left(T_{\Phi(t_{i+1}, s_{j+1}), \Phi(t_{i+1}, s_j), \Phi(t_i, s_{j+1})} \right) \right).$$

Definiamo inoltre il diametro di \mathcal{P} come

$$\text{diam}(\mathcal{P}) = \sup_{i,j} \left\{ \text{diam}(R_{ij}) \right\},$$

dove

$$\text{diam}(R_{ij}) := \sqrt{|t_{i+1} - t_i|^2 + |s_{j+1} - s_j|^2}.$$

Teorema 2. Con le notazioni e le ipotesi di qui sopra, abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\text{diam}(\mathcal{P}) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \mathcal{S}(\mathcal{P}) - \iint_{\mathcal{R}} |\partial_x \Phi(x, y) \wedge \partial_y \Phi(x, y)| dx dy \right| < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\begin{aligned} & \text{Area} \left(T_{\Phi(t_i, s_j), \Phi(t_{i+1}, s_j), \Phi(t_i, s_{j+1})} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(\Phi(t_{i+1}, s_j) - \Phi(t_i, s_j) \right) \wedge \left(\Phi(t_i, s_{j+1}) - \Phi(t_i, s_j) \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left((t_{i+1} - t_i), 0, F(t_{i+1}, s_j) - F(t_i, s_j) \right) \wedge \left(0, (s_{j+1} - s_j), F(t_i, s_{j+1}) - F(t_i, s_j) \right) \right| \end{aligned}$$

Per il teorema di Lagrange, esistono

$$h_i \in (t_i, t_{i+1}) \quad \text{e} \quad k_j \in (s_j, s_{j+1})$$

tali che

$$F(t_{i+1}, s_j) - F(t_i, s_j) = (t_{i+1} - t_i) \partial_x F(h_i, s_j) \quad \text{e} \quad F(t_i, s_{j+1}) - F(t_i, s_j) = (s_{j+1} - s_j) \partial_y F(t_i, k_j).$$

Allora,

$$\begin{aligned} & \text{Area} \left(T_{\Phi(t_i, s_j), \Phi(t_{i+1}, s_j), \Phi(t_i, s_{j+1})} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left| \left(\Phi(t_{i+1}, s_j) - \Phi(t_i, s_j) \right) \wedge \left(\Phi(t_i, s_{j+1}) - \Phi(t_i, s_j) \right) \right| \\ &= \frac{(t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j)}{2} \left| \left(1, 0, \partial_x F(h_i, s_j) \right) \wedge \left(0, 1, \partial_y F(t_i, k_j) \right) \right| \\ &= \frac{|R_{ij}|}{2} \left| \left(1, 0, \partial_x F(h_i, s_j) \right) \wedge \left(0, 1, \partial_y F(t_i, k_j) \right) \right|. \end{aligned}$$

Per l'uniforme continuità delle funzioni $\partial_x F$ e $\partial_y F$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se il diametro di R_{ij} è più piccolo di δ , allora

$$|\partial_x \Phi(t_i, s_j) \wedge \partial_y \Phi(t_i, s_j)| - \varepsilon \leq \left| \left(1, 0, \partial_x F(h_i, s_j) \right) \wedge \left(0, 1, \partial_y F(t_i, k_j) \right) \right| \leq |\partial_x \Phi(t_i, s_j) \wedge \partial_y \Phi(t_i, s_j)| + \varepsilon.$$

Usando lo stesso ragionamento per il triangolo $T_{\Phi(t_{i+1}, s_{j+1}), \Phi(t_{i+1}, s_j), \Phi(t_i, s_{j+1})}$, e sommando su i e j , otteniamo

$$\left| \mathcal{S}(\mathcal{P}) - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} |R_{ij}| \frac{|\partial_x \Phi(t_i, s_j) \wedge \partial_y \Phi(t_i, s_j)| + |\partial_x \Phi(t_{i+1}, s_{j+1}) \wedge \partial_y \Phi(t_{i+1}, s_{j+1})|}{2} \right| < \varepsilon |\mathcal{R}|.$$

Usando di nuovo l'uniforme continuità di

$$|\partial_x \Phi \wedge \partial_y \Phi| : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

otteniamo che se la partizione \mathcal{P} ha diametro più piccolo di un certo $\delta > 0$, abbiamo che

$$\left| \iint_{\mathcal{R}} |\partial_x \Phi(x, y) \wedge \partial_y \Phi(x, y)| dx dy - \sum_{i,j} |R_{ij}| \frac{|\partial_x \Phi(t_i, s_j) \wedge \partial_y \Phi(t_i, s_j)| + |\partial_x \Phi(t_{i+1}, s_{j+1}) \wedge \partial_y \Phi(t_{i+1}, s_{j+1})|}{2} \right| < \varepsilon |\mathcal{R}|,$$

il che conclude la dimostrazione. \square

Definizione 3. Data una funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 ed un insieme limitato e misurabile secondo Riemann $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, definiamo l'area del grafico

$$\Gamma = \left\{ \Phi(x, y) = (x, y, F(x, y)) : (x, y) \in \Omega \right\},$$

della funzione $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$\text{Area}(\Gamma) := \iint_{\Omega} |\partial_x \Phi(x, y) \wedge \partial_y \Phi(x, y)| dx dy.$$

Più in generale, data una funzione continua e limitata $G : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo l'integrale di G su Γ come

$$\int_{\Gamma} G := \iint_{\Omega} G(x, y, F(x, y)) |\partial_x \Phi(x, y) \wedge \partial_y \Phi(x, y)| dx dy.$$