Integrali impropri in $\mathbb{R}^2$

Definizione 1. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non-negativa. Allora, per ogni $R > 0$, abbiamo che F è integrabile secondo Riemann sulla palla B_R, ovvero l'integrale*

$$\iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy$$

esiste ed è non-negativo. Inoltre, la funzione

$$R \mapsto \iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy$$

è monotona crescente. Se

$$\lim_{R\to+\infty} \iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy < +\infty,$$

allora definiamo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} F(x,y)\,dx\,dy := \lim_{R\to+\infty} \iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Altrimenti, se

$$\lim_{R\to+\infty} \iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy < +\infty,$$

diremo che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} F(x,y)\,dx\,dy := +\infty.$$

Esercizio 2. *Calcolare l'integrale improprio*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}\ .$$

Esercizio 3. *Calcolare l'integrale improprio*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}\ .$$

Integrazione su rettangoli

Proposizione 4. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non-negativa, ovvero*

$$F(x,y) \geq 0 \qquad \text{per ogni} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Per ogni $R > 0$, siano B_R la palla di raggio R e $Q_R = [-R,R] \times [-R,R]$ il quadrato di lato $2R$. Allora,

$$\lim_{R\to+\infty} \iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty} \iint_{Q_R} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Proof. Osserviamo che

$$B_R \subset Q_R \subset B_{2R} \qquad \text{per ogni} \qquad R > 0.$$

Di conseguenza

$$F(x,y)\mathbb{1}_{B_R} \leq F(x,y)\mathbb{1}_{Q_R} \leq F(x,y)\mathbb{1}_{B_{2R}},$$

dove, per un qualsiasi insieme $\Omega \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{1}_\Omega$ è la funzione indicatrice di Ω:

$$\mathbb{1}_\Omega(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x,y) \in \Omega; \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora, abbiamo che

$$\iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{Q_R} F(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_{B_{2R}} F(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Quindi:

- se
$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy = +\infty,$$
allora anche
$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{Q_R} F(x,y)\,dx\,dy = +\infty;$$
- se invece
$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy = L < +\infty,$$
allora anche
$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{B_{2R}} F(x,y)\,dx\,dy = L,$$
e quindi, per il teorema dei carabinieri,
$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{Q_R} F(x,y)\,dx\,dy = L.$$

□

Esercizio 5. *Calcolare l'integrale improprio*
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)}\ .$$

Integrazione su palle con centro diverso dall'origine

Proposizione 6. *Sia $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione continua e non-negativa, ovvero*
$$F(x,y)\ge 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$
Sia $X_0\in\mathbb{R}^2$ un punto fissato. Per ogni $R>0$, consideriamo le palle B_R (di centro l'origine) e $B_R(X_0)$ (di centro X_0). Allora
$$\lim_{R\to+\infty}\iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty}\iint_{B_R(X_0)} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Proof. Osserviamo che
$$B_R\subset B_R(X_0)\subset B_{2R} \qquad \text{per ogni} \qquad R>|X_0|.$$
Di conseguenza
$$\iint_{B_R} F(x,y)\,dx\,dy \le \iint_{B_R(X_0)} F(x,y)\,dx\,dy \le \iint_{B_{2R}} F(x,y)\,dx\,dy\,.$$

□

L'integrale della Gaussiana

Proposizione 7. *Dimostrare che*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}\,.$$

Dimostrazione. Sia D_R il disco di raggio R in $\mathbb{R}^2$
$$D_R = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2<R^2\Big\}.$$
Calcoliamo l'integrale
$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy.$$
Usando le coordinate polari
$$x = r\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = r\sin\theta$$

abbiamo che

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2/2}\,d\theta\,r\,dr = 2\pi \int_0^R e^{-r^2/2}\,r\,dr.$$

Usando il cambiamento di variabile

$$s = \frac{1}{2}r^2$$

otteniamo

$$2\pi \int_0^{\frac{1}{2}R^2} e^{-s}\,ds = 2\pi\Big(1 - e^{-R^2/2}\Big),$$

e quindi

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty} \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty} 2\pi\Big(1 - e^{-R^2/2}\Big) = 2\pi.$$

Sia ora Q_R il quadrato $Q_R = (-R,R)\times(-R,R)$. Allora,

$$\lim_{R\to 0} \iint_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = 2\pi.$$

D'altra parte, ponendo $I(R) = \displaystyle\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}\,dx$, abbiamo che

$$\begin{aligned} I^2(R) &= \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}\,dx\right)\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}\,dx\right) = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2/2}\,dx\right)\left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2/2}\,dy\right) \\ &= \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{+R} e^{-x^2/2}e^{-y^2/2}\,dx\,dy = \iint_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy = \iint_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\lim_{R\to+\infty} I^2(R) = 2\pi,$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} I(R) = \sqrt{2\pi}\,.$$

$\square$