# Flusso di un campo attraverso il bordo di un dominio normale

## Domini normali semplici di classe $C^1$

Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e siano

$$u : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad v : [a,b] \to \mathbb{R},$$

due funzioni di classe $C^1$ su $[a,b]$ tali che:

$$u(x) < v(x) \qquad \text{per ogni} \qquad x \in (a,b).$$

Consideriamo il dominio normale semplice

$$D = \Big\{(x,y) \ : \ x \in [a,b],\ u(x) \le y \le v(x)\Big\}.$$

Per ogni punto di frontiera $(x,y) \in \partial D$, definiamo

**il vettore normale uscente** $\nu_D(x,y)$

come segue:

(1) se $(x,y) \in \Big\{(x,u(x)) \ : \ x \in (a,b)\Big\}$, allora

$$\nu_D(x,y) = \nu_D(x,u(x)) = \frac{\big(u'(x),-1\big)}{\sqrt{1+\big(u'(x)\big)^2}}.$$

(2) se $(x,y) \in \Big\{(x,v(x)) \ : \ x \in (a,b)\Big\}$, allora

$$\nu_D(x,y) = \nu_D(x,v(x)) = \frac{\big(-v'(x),1\big)}{\sqrt{1+\big(v'(x)\big)^2}}.$$

(3) se $(x,y) \in \Big\{(a,y) \ : \ y \in [u(a),v(a)]\Big\}$, allora

$$\nu_D(x,y) = \nu_D(a,y) = (-1,0).$$

(4) se $(x,y) \in \Big\{(b,y) \ : \ y \in [u(b),v(b)]\Big\}$, allora

$$\nu_D(x,y) = \nu_D(b,y) = (1,0).$$

---

## Integrazione di funzioni sul bordo di un dominio normale

Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e siano

$$u : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad v : [a,b] \to \mathbb{R},$$

due funzioni di classe $C^1$ su $[a,b]$ tali che:

$$u(x) < v(x) \qquad \text{per ogni} \qquad x \in (a,b).$$

Consideriamo il dominio normale semplice

$$D = \Big\{(x,y) \ : \ x \in [a,b],\ u(x) \le y \le v(x)\Big\}.$$

Sia $\gamma$ la curva semplice chiusa che parametrizza il bordo $\partial D$ in senso antiorario.
Data una funzione continua

$$F : \partial D \to \mathbb{R},$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\gamma F = \int_a^b F\big(x,u(x)\big)\sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx \\ + \int_{u(b)}^{v(b)} F\big(b,y\big)\,dy \\ + \int_a^b F\big(x,v(x)\big)\sqrt{1+(v'(x))^2}\,dx \\ + \int_{u(a)}^{v(a)} F\big(a,y\big)\,dy.\end{aligned}$$

---

## Flusso di un campo vettoriale attraverso il bordo di un dominio normale

Sia $[a,b]\subset\mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato e siano

$$u:[a,b]\to\mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad v:[a,b]\to\mathbb{R},$$

due funzioni di classe $C^1$ su $[a,b]$ tali che:

$$u(x)<v(x) \qquad \text{per ogni} \qquad x\in(a,b).$$

Consideriamo il dominio normale semplice

$$D=\Big\{(x,y)\ :\ x\in[a,b],\ u(x)\le y\le v(x)\Big\}.$$

Sia $\gamma$ la curva semplice chiusa che parametrizza il bordo $\partial D$ in senso antiorario.
Dato un campo continuo

$$\Phi=(F,G):\partial D\to\mathbb{R}^2,$$

abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\gamma \Phi\cdot\nu_D &= \int_a^b \Big(F\big(x,u(x)\big),G\big(x,u(x)\big)\Big)\cdot\frac{(u'(x),-1)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}}\sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx \\ &\quad + \int_{u(b)}^{v(b)} \Big(F\big(b,y\big),G\big(b,y\big)\Big)\cdot(1,0)\,dy \\ &\quad + \int_a^b \Big(F\big(x,v(x)\big),G\big(x,v(x)\big)\Big)\cdot\frac{(-v'(x),1)}{\sqrt{1+(v'(x))^2}}\sqrt{1+(v'(x))^2}\,dx \\ &\quad + \int_{u(a)}^{v(a)} \Big(F\big(a,y\big),G\big(a,y\big)\Big)\cdot(-1,0)\,dy \\ &= \int_a^b \Big(F\big(x,u(x)\big)u'(x)-G\big(x,u(x)\big)\Big)\,dx \\ &\quad + \int_{u(b)}^{v(b)} F\big(b,y\big)\,dy \\ &\quad + \int_a^b \Big(-F\big(x,(x)\big)v'(x)+G\big(x,v(x)\big)\Big)\,dx \\ &\quad - \int_{u(a)}^{v(a)} F\big(a,y\big)\,dy.\end{aligned}$$