Esercizio sulle forme chiuse

Esercizio 1. *Consideriamo la 1-forma*

$$\alpha = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\,.$$

Per ogni $(x,y)\in B_1$ *definiamo la curva*

$$\sigma_{x,y}:[0,1]\to\mathbb{R}^2\ ,\quad \sigma(t)=\big(x+\cos t, y+\sin t\big)\ .$$

Calcolare, al variare di $(x,y)\in B_1$ *l'integrale* $\displaystyle\int_{\sigma_{x,y}}\alpha.$

Soluzione. Come conseguenza della proposizione seguente abbiamo che $\displaystyle\int_{\sigma_{x,y}}\alpha = 2\pi.$ □

Proposizione 2. *Sia* Ω *un aperto in* $\mathbb{R}^2$. *Sia*

$$\alpha = F(x,y)\,dx + G(x,y)\,dy$$

una 1*-forme chiusa di classe* C^1 *su* Ω. *Sia*

$$\sigma:[0,1]\to\Omega\ ,\quad \sigma(t)=\big(a(t),b(t)\big)\ ,$$

una curva chiusa, di classe C^1. *Per ogni*

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

definiamo la curva

$$\sigma_{x,y}:[0,1]\to\mathbb{R}^2\ ,\quad \sigma_{x,y}(t)=\big(x+a(t), y+b(t)\big)\ .$$

Allora:

(a) *esiste* $\varepsilon>0$, *che dipende da* σ *e* Ω, *tale che*

$$\sigma_{x,y}(t)\in\Omega\quad\textit{per ogni}\quad t\in[0,1]\quad\textit{ed ogni}\quad (x,y)\in B_\varepsilon.$$

(b) *per ogni* $(x,y)\in B_\varepsilon$, *abbiamo che*

$$\int_{\sigma_{x,y}}\alpha = \int_\sigma \alpha.$$

Dimostrazione. Dimostriamo (b). Consideriamo la funzione

$$\Phi: B_\varepsilon\to\mathbb{R}\ ,\quad \Phi(x,y)=\int_{\sigma_{x,y}}\alpha\,.$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\partial_x\Phi(x,y) &= \partial_x\int_0^1\Big(F\big(x+a(t),y+b(t)\big)a'(t)+G\big(x+a(t),y+b(t)\big)b'(t)\Big)\,dt\\ &= \int_0^1\partial_x\Big(F\big(x+a(t),y+b(t)\big)a'(t)+G\big(x+a(t),y+b(t)\big)b'(t)\Big)\,dt\\ &= \int_0^1\Big(\partial_xF\big(x+a(t),y+b(t)\big)a'(t)+\partial_xG\big(x+a(t),y+b(t)\big)b'(t)\Big)\,dt.\end{aligned}$$

Ora siccome la forma α è chiusa

$$\partial_yF=\partial_xG\quad\text{su}\quad\Omega,$$

e quindi otteniamo

$$\begin{aligned}\partial_x\Phi(x,y) &= \int_0^1\Big(\partial_xF\big(x+a(t),y+b(t)\big)a'(t)+\partial_yF\big(x+a(t),y+b(t)\big)b'(t)\Big)\,dt\\ &= \int_0^1\frac{d}{dt}\Big[F\big(x+a(t),y+b(t)\big)\Big]\,dt = \Big[F\big(x+a(t),y+b(t)\big)\Big]_0^1 = 0.\end{aligned}$$

□