

1-forme chiuse in domini rettangolari

Teorema 1. Consideriamo il rettangolo

$$\mathcal{R} = (A_1, B_1) \times (A_2, B_2) \subset \mathbb{R}^2.$$

Se α è una 1-forma chiusa di classe C^1 su \mathcal{R} , allora α è anche esatta.

Dimostrazione: Consideriamo la 1-forma

$$\alpha := a(x, y) dx + b(x, y) dy,$$

e ricordiamo che

$$\alpha \text{ è chiusa} \Leftrightarrow d\alpha = 0 \Leftrightarrow \partial_y a = \partial_x b \text{ in } \mathcal{R}.$$

Fissiamo un punto $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ e per ogni $(x, y) \in \mathcal{R}$ definiamo la funzione

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x a(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y b(x, s) ds.$$

Allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} (F(x, y+k) - F(x, y)) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_y^{y+k} b(x, s) ds = b(x, y).$$

Inoltre, nella direzione x , abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (F(x+h, y) - F(x, y)) &= \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x+h} a(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y b(x+h, s) ds \right) - \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^x a(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y b(x, s) ds \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} a(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y \frac{1}{h} (b(x+h, s) - b(x, s)) ds \end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(x+h, y) - F(x, y)) &= a(x, y_0) + \int_{y_0}^y \partial_x b(x, s) ds \quad (\text{abbiamo derivato sotto il segno dell'integrale}) \\ &= a(x, y_0) + \int_{y_0}^y \partial_y a(x, s) ds \quad (\text{qui abbiamo usato che } \partial_y a = \partial_x b) \\ &= a(x, y_0) + (a(x, y) - a(x, y_0)) = a(x, y). \end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo dimostrato che F è derivabile in ogni punto di \mathcal{R} e le sue derivate parziali sono:

$$\partial_x F(x, y) = a(x, y) \quad \text{e} \quad \partial_y F(x, y) = b(x, y).$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} dF &= \partial_x F(x, y) dx + \partial_y F(x, y) dy \quad (\text{per definizione della derivata esterna}) \\ &= a(x, y) dx + b(x, y) dy. \end{aligned}$$

La forma α è quindi esatta. □

Esercizio 2. Siano

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

due funzioni di classe C^1 su $[a, b]$ e tali che

$$f(x) < g(x) \quad \text{per ogni } a < x < b.$$

Sia Ω l'insieme aperto

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, f(x) < y < g(x) \right\}.$$

Dimostrare che su Ω ogni 1-forma chiusa è esatta.