
Esercizi 2021/2022

DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA

Esercizio 1. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = \cos(3x - 3 + 2y) + \sin(3y - x + 1)$$

e la curva

$$\gamma(t) = e^t(\cos(t), \sin(t)).$$

Calcolare la derivata $(F \circ \gamma)'(t)$ della funzione composta $t \mapsto F(\gamma(t))$ nel punto $t = 0$.

MASSIMI E MINIMI RELATIVI**Esercizio 2.** Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = x^3 - \frac{1}{3}y^3 + xy - x^2$$

Sia $A_0 = (x_0, y_0)$ l'unico punto critico di F fra i punti

$$(1, 1), (1, -1) \text{ e } (-1, 1).$$

- (1) Trovare (x_0, y_0) .
- (2) Calcolare la matrice hessiana $\nabla^2 F(x_0, y_0)$ nel punto (x_0, y_0) .
- (3) Stabilire se nel punto (x_0, y_0) la matrice hessiana di $\nabla^2 F$ è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, oppure indefinita.
- (4) Usando il punto precedente, determinare il comportamento della funzione F in un intorno del punto (x_0, y_0) .

MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI**Esercizio 3.** Data la funzione

$$F(x, y) = \frac{xy + x}{x^2 + y^2 + 1}$$

- trovare i punti critici di F in \mathbb{R}^2 ;
- studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo locale, di minimo locale o punti di sella;
- calcolare $\limsup_{X \rightarrow \infty} F(X)$ e $\liminf_{X \rightarrow \infty} F(X)$;
- trovare $\sup_{\mathbb{R}^2} F$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} F$ e dire se sono raggiunti in \mathbb{R}^2 oppure sono realizzati all'infinito.

MASSIMI E MINIMI SU INSIEMI COMPATTI

Esercizio 4. *Trovare il massimo ed il minimo della funzione*

$$F(x, y) = x^2 - y^2$$

sull'insieme

$$D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq x\}.$$

LIMINF E LIMSUP ALL'INFINITO

Esercizio 5. *Determinare*

$$\limsup_{\substack{|(x, y)| \rightarrow +\infty \\ (x, y) \in \Omega}} F(x, y) \quad e \quad \liminf_{\substack{|(x, y)| \rightarrow +\infty \\ (x, y) \in \Omega}} F(x, y),$$

dove

$$F(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^2 + 1} \quad e \quad \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}.$$

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Esercizio 6. *Trovare il massimo ed il minimo della funzione*

$$F(x, y, z) = x - y + z$$

sull'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}.$$

LIMITI, LIMINF E LIMSUP NELL'ORIGINE

Esempio 7. *Studiare il comportamento (esistenza di limite, limsup e liminf), per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, della funzione*

$$F(x, y) := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}(1 + y^2)}.$$

CONVERGENZA UNIFORME

Esercizio 8. *Consideriamo la famiglia di funzioni*

$$F_r : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_r(x) = \sqrt{1 + r^2 x^2}.$$

Trovare il limite puntuale G della famiglia F_r per $r \rightarrow 0$.

Dire se F_r converge uniformemente a G per $r \rightarrow 0$.

TAYLOR

Esercizio 9. *Sviluppare la funzione di due variabili*

$$F(x, y) = \frac{e^{\sin x}}{1 + xy}$$

fino al secondo ordine in zero.

DIFFERENZIABILITÀ, DERIVABILITÀ, CONTINUITÀ

Esercizio 10. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$F(0,0) = 0 \quad e \quad F(x,y) = \frac{xy \sin(x)}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0).$$

- (1) Dire se F è derivabile in zero e calcolare, se esiste il gradiente $\nabla F(0,0) = (0,0)$.
- (2) Dire se F è derivabile su \mathbb{R}^2 e determinare se le sue derivate parziali $\partial_x F$ e $\partial_y F$ sono funzioni continue su \mathbb{R}^2 .
- (3) Dire se F è differenziabile in zero.
- (4) Dire se F è continua su \mathbb{R}^2 .
- (5) Calcolare, al variare del vettore $V = (a,b) \neq (0,0)$, la derivata direzionale

$$\partial_V F(0,0) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} F(tV).$$

FORME DIFFERENZIALI. CALCOLO DI $d\alpha$

Esercizio 11. Consideriamo la forma differenziale

$$\alpha = (3y + xy^2) dx + (2x - x^2y) dy.$$

Calcolare $d\alpha$.

FORME CHIUSE

Esercizio 12. Dati tre numeri interi positivi $m, n, k \in \mathbb{N}$, consideriamo la 1-forma

$$\alpha = e^{nx}(y^4 - mx + 1) dx + e^{mx}y^k dy.$$

Per quali valori dei parametri m, n e k la forma α è chiusa?

FORME CHIUSE E INTEGRAZIONE DI 1-FORME

Esercizio 13. Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la forma differenziale

$$\alpha = \frac{ay + x}{x^2 + y^2} dx + \frac{x + y}{x^2 + y^2} dy$$

è chiusa? Per i valori trovati calcolare $\int_\gamma \alpha$, dove γ è la curva

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos(2t), \sin(2t)).$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI SU DOMINI NORMALI

Esercizio 14 (Appello luglio 2021). *Consideriamo il dominio d'integrazione*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2x^2 + 1} \leq y \leq x + 1\}.$$

e la funzione

$$F(x, y) = xy.$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D F(x, y) dx dy.$$

CALCOLO DELL'AREA DI UN DOMINIO

Esercizio 15. *Calcolare l'area del dominio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x - x^2\}.$$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Esercizio 16. *Sia D l'insieme*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale

$$F(x, y) = (xy, y(y - x)x^6).$$

Calcolare

$$I = \iint_{B_1} \operatorname{div} F(x, y) dx dy.$$

FORMULA DI STOKES

Esercizio 17 (Giugno 2020). *Sia D il dominio*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 2x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$$

e sia γ una curva semplice chiusa C^1 a tratti che parametrizza il bordo di D in senso antiorario.

Data la 1-forma

$$\alpha = (x^2 - 2xy) dx + (y^3 + x) dy,$$

calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \alpha$.

Esercizio 18. In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$D := B_2(0,0) \setminus \{(x,0) : 0 < x < 2\}.$$

(1) Dire se l'insieme D è:

- aperto;
- chiuso;
- compatto;
- stellato;
- connesso per archi;
- convesso.

(2) Determinare la frontiera di D .

Esercizio 19. In \mathbb{R}^2 , consideriamo l'insieme

$$\Omega = B_1(0,0) \setminus \{(x,y) : xy = 0\}.$$

(1) Trovare la parte interna, la chiusura e la frontiera di Ω .

(2) È vero che $\partial\bar{\Omega} = \partial\Omega$?