o-piccolo e O-grande, in coordinate cartesiane e coordinate polari

Definizione

Definizione 1. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili.*

- **o-piccolo.** *Dato $k \geq 0$, diremo che*
$$F(x,y) = o\Big(|(x,y)|^k\Big) = o\Big(\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k\Big),$$
se
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k} = 0,$$
ovvero se
$$\textit{Per ogni } \varepsilon > 0 \textit{ esiste } \delta > 0 \textit{ tale che: } \quad 0 < |(x,y)| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{|F(x,y)|}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k} < \varepsilon.$$

- **O-grande.** *Dato $k \geq 0$, diremo che*
$$F(x,y) = O\Big(|(x,y)|^k\Big) = O\Big(\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k\Big),$$
se
$$\textit{Esistono } C > 0 \textit{ e } \delta > 0 \textit{ tale che: } \quad 0 < |(x,y)| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{|F(x,y)|}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k} < C.$$

Passaggio da o-piccolo a O-grande e viceversa

Un'osservazione utile in generale (che però non sarà necessaria per la definizione di o-piccolo e O-grande in coordinate polari) è la seguente.

Osservazione 2. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Sia $k \geq 0$.*

- **o-piccolo $\Rightarrow$ O-grande.** *Se*
$$k \geq 0 \qquad e \qquad F(x,y) = o\Big(|(x,y)|^k\Big),$$
allora
$$F(x,y) = O\Big(|(x,y)|^k\Big).$$

- **O-grande $\Rightarrow$ o-piccolo.** *Se*
$$k \geq 1 \qquad e \qquad F(x,y) = O\Big(|(x,y)|^k\Big),$$
allora
$$F(x,y) = o\Big(|(x,y)|^{k-1}\Big).$$

Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Sia $k \geq 0$. Allora,

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{F(x,y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^k} = 0$;

è equivalente a

(ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$0 < |(x,y)| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{|F(x,y)|}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^k} < \varepsilon.$$

Siccome ogni punto $(x,y) \neq (0,0)$ si può scrivere come

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad \text{per} \quad r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi],$$

abbiamo che (ii) è equivalente a:

(iii) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$0 < r < \delta \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \Rightarrow \quad \frac{\big|F(r\cos\theta, r\sin\theta)\big|}{r^k} < \varepsilon.$$

Ora, osserviamo che l'affermazione (iii) è equivalente a

(iv) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$0 < r < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \frac{\big|F(r\cos\theta, r\sin\theta)\big|}{r^k} < \varepsilon.$$

Infine, per la definizione di limite, (iv) è equivalente a

(v)

$$\lim_{r\to 0} \left\{ \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \frac{\big|F(r\cos\theta, r\sin\theta)\big|}{r^k} \right\} = 0.$$

Abbiamo quindi dimostrato la proposizione seguente:

Proposizione 3. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Sia $k \geq 0$. Allora, sono equivalenti:*

(1) $F(x,y) = o\Big(|(x,y)|^k\Big)$.

(2) $\displaystyle\sup_{\theta\in[0,2\pi]} \big|F(r\cos\theta, r\sin\theta)\big| = o\big(r^k\big)$.

Per alleggerire la notazione, introduciamo la seguente convenzione.

Definizione 4. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Sia $k \geq 0$.*

$$\textit{Diremo che} \qquad F(r\cos\theta, r\sin\theta) = o(r^k)\ , \qquad \textit{se} \qquad \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \big|F(r\cos\theta, r\sin\theta)\big| = o\big(r^k\big).$$

O-grande in coordinate polari

Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Siano $k \geq 0$ un numero intero e $C > 0$ una costante positiva. Allora, l'affermazione

(i) Esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{|F(x,y)|}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k} < C \qquad \text{per ogni} \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \ ;$$

è equivalente a

(ii) Esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\frac{|F(r\cos\theta, r\sin\theta)|}{r^k} < C \qquad \text{per ogni} \quad 0 < r < \delta \quad \text{ed ogni} \quad \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

L'affermazione (ii) è a sua volta equivalente a

(iii) Esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]} \frac{|F(r\cos\theta, r\sin\theta)|}{r^k} < C \qquad \text{per ogni} \quad 0 < r < \delta \ .$$

Abbiamo quindi dimostrato la proposizione seguente:

Proposizione 5. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Sia $k \geq 0$. Allora, sono equivalenti:*

(1) $F(x,y) = O\Big(|(x,y)|^k\Big)$.

(2) $\sup_{\theta\in[0,2\pi]} \big|F(r\cos\theta, r\sin\theta)\big| = O\big(r^k\big)$.

Come per l'o-piccolo, introduciamo la seguente convenzione.

Definizione 6. *Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Sia $k \geq 0$.*

$$\textit{Diremo che} \qquad F(r\cos\theta, r\sin\theta) = O(r^k) \ , \qquad \textit{se} \qquad \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \big|F(r\cos\theta, r\sin\theta)\big| = O\big(r^k\big).$$

Qualche esempio

- $y = o(1)$; $x = o(1)$;
- $y = O(\sqrt{x^2+y^2}) = o(r)$; $x = O(\sqrt{x^2+y^2}) = o(r)$;
- $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = O(1)$;
- $\sin y = O(\sqrt{x^2+y^2}) = O(r)$;
- $\cos x - 1 = O(x^2+y^2) = O(r^2)$;
- $e^y = 1 + O(\sqrt{x^2+y^2}) = 1 + O(r)$;
- $\cos y = 1 + o(\sqrt{x^2+y^2}) = 1 + o(r)$;
- $\dfrac{1}{1+xy} = 1 + O(x^2+y^2) = 1 + O(r^2) = 1 + o(r)$.