Equazioni di Lotka-Volterra

Fissiamo le costanti reali positive A, B, C e D e consideriamo il sistema

$$\text{(LV)} \qquad \begin{cases} x' = Ax - Bxy, \\ y' = -Dy + Cxy. \end{cases}$$

Esercizio 1. *Trovare i punti stazionari del sistema* (LV).

Esercizio 2. *Mostrare che se* $(x,y):[0,T)\to\mathbb{R}^2$ *è una soluzione del sistema* (LV) *con dato iniziale in* $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$*, allora*

$$x(t)>0 \quad e \quad y(t)>0 \quad per\ ogni \quad t\in[0,T).$$

Esercizio 3. *Sia* $(x,y):[0,T_{max})\to\mathbb{R}^2$ *una soluzione (massimale) del sistema* (LV) *con dato iniziale*

$$x_0=\frac{D}{C} \qquad e \qquad y_0\in\Big(0,\frac{A}{B}\Big).$$

Mostrare che esiste $T>0$, $T\in(0,T_{max})$ *tale che:*

- $x(t)>\dfrac{D}{C}$ *per ogni* $t\in(0,T)$*;*
- x *è strettamente crescente su* $(0,T)$*;*
- $x(T)>\dfrac{D}{C}$*;*
- y *è strettamente crescente su* $(0,T)$*;*
- $y(t)<\dfrac{A}{B}$ *per ogni* $t\in(0,T)$*;*
- $y(T)=\dfrac{A}{B}$.

Esercizio 4. *Mostrare che la funzione*

$$H(x,y)=Cx-D\ln x+By-A\ln y$$

è un integrale primo per il sistema (LV).

Teorema 5. *Sia* (x,y) *una soluzione del sistema* (LV) *con dato iniziale* (x_0,y_0) *tale che*

$$x_0>0, \quad y_0>0, \quad (x_0,y_0)\neq\left(\frac{D}{C},\frac{A}{B}\right).$$

Allora, la soluzione $(x(t),y(t))$ *è definita per ogni* $t>0$ *ed è una funzione periodica (ovvero, la traiettoria della soluzione è una curva chiusa).*