

## Massimi e minimi relativi

### DEFINIZIONI

**Definizione 1** (Massimi e minimi relativi). Sia  $\Omega$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^d$  e sia  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione.

- Diciamo che  $X_0 \in \Omega$  è un punto di MINIMO RELATIVO di  $F$  in  $\Omega$ , se esiste  $B_r(X_0)$  tale che

$$F(X_0) \leq F(X) \quad \text{per ogni} \quad X \in B_r(X_0) \cap \Omega.$$

Se invece esiste  $r > 0$  tale che

$$F(X_0) < F(X) \quad \text{per ogni} \quad X \in B_r(X_0) \cap \Omega, X \neq X_0,$$

diremo che  $X_0$  è un MINIMO RELATIVO STRETTO.

- Diciamo che  $X_0 \in \Omega$  è un punto di MASSIMO RELATIVO di  $F$  in  $\Omega$ , se esiste  $B_r(X_0)$  tale che

$$F(X_0) \geq F(X) \quad \text{per ogni} \quad X \in B_r(X_0) \cap \Omega.$$

Se invece esiste  $r > 0$  tale che

$$F(X_0) > F(X) \quad \text{per ogni} \quad X \in B_r(X_0) \cap \Omega, X \neq X_0,$$

diremo che  $X_0$  è un MASSIMO RELATIVO STRETTO.

- Se  $X_0 \in \Omega$  è un PUNTO CRITICO di  $F$ , ma non è un punto né di massimo né di minimo relativo, allora diremo che  $X_0$  è un PUNTO DI SELLA.

**Definizione 2** (Punti critici). Sia  $\Omega$  un insieme aperto di  $\mathbb{R}^d$  e sia  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile su  $\Omega$ . Diciamo che un punto  $X_0 \in \Omega$  è un PUNTO CRITICO per  $F$  se  $\nabla F(X_0) = 0$ .

### CONDIZIONI NECESSARIE PER L'ESISTENZA DI MASSIMI E MINIMI RELATIVI

**Teorema 3.** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^d$  e sia  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  su  $\Omega$ . Se  $F$  ha un minimo relativo nel punto  $X_0 \in \Omega$ , allora

$$\nabla F(X_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 F(X_0) \geq 0.$$

Se invece  $F$  ha un massimo relativo in  $X_0$ , allora

$$\nabla F(X_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 F(X_0) \leq 0.$$

*Dimostrazione.* Per ogni vettore  $X \in \mathbb{R}^d$  consideriamo la funzione  $t \mapsto F(X_0 + tX)$ . Se  $F$  ha un minimo relativo in  $X_0$ , allora la funzione (di una variabile reale)  $t \mapsto F(X_0 + tX)$  ha un minimo relativo in  $t = 0$ . Di conseguenza,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(X_0 + tX) = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} F(X_0 + tX) \geq 0,$$

ovvero

$$X \cdot \nabla F(X_0) = 0 \quad \text{e} \quad X \cdot \nabla^2 F(X_0) X \geq 0.$$

Siccome il vettore  $X$  è arbitrario abbiamo che

$$X \cdot \nabla^2 F(X_0)X \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad X \in \mathbb{R}^d.$$

Di conseguenza, la matrice hessiana  $\nabla^2 F(X_0)$  è semi-definita positiva. Infine, scegliendo  $X = \nabla F(X_0)$  nella condizione al primo ordine

$$X \cdot \nabla F(X_0) = 0,$$

otteniamo che

$$|\nabla F(X_0)|^2 = 0,$$

ovvero che  $X_0$  è un punto critico per  $F$ . □

#### CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'ESISTENZA DI MASSIMI E MINIMI RELATIVI

**Teorema 4.** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^d$  e sia  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  su  $\Omega$ .*

- *Se il punto  $X_0 \in \Omega$  è tale che*

$$\nabla F(X_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 F(X_0) > 0,$$

*allora  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ha un punto di minimo relativo in  $X_0$ .*

- *Se invece il punto  $X_0 \in \Omega$  è tale che*

$$\nabla F(X_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 F(X_0) < 0,$$

*allora  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ha un punto di massimo relativo in  $X_0$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che

$$\nabla F(X_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 F(X_0) > 0.$$

Definiamo

$$M = \min_{\nu \in \partial B_1} \{\nu \cdot \nabla^2 F(X_0)\nu\}.$$

Siccome il minimo è realizzato in un vettore  $\nu_{min}$ , abbiamo che  $M > 0$ . Di conseguenza

$$X \cdot \nabla^2 F(X_0)X \geq M|X|^2 \quad \text{per ogni} \quad X \in \mathbb{R}^d.$$

Ora, per il Teorema di Taylor, esiste una funzione  $\varepsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$F(X + X_0) = F(X_0) + \frac{1}{2}X \cdot \nabla^2 F(X_0)X + \varepsilon(X) \quad \text{dove} \quad \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(X)}{|X|^2} = 0.$$

Di conseguenza,

$$F(X + X_0) - F(X_0) \geq |X|^2 \left( \frac{M}{2} + \frac{\varepsilon(X)}{|X|^2} \right) \geq 0,$$

per  $|X|$  abbastanza piccolo. □

#### CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'ESISTENZA DI PUNTI DI SELLA

**Teorema 5.** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^d$  e sia  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  su  $\Omega$ .*

*Se il punto  $X_0 \in \Omega$  è un punto critico (ovvero  $\nabla F(X_0) = 0$ ) e la matrice  $\nabla^2 F(X_0)$  è indefinita, allora  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ha un punto di sella in  $X_0$ .*

*Dimostrazione.* Siccome  $\nabla^2 F(X_0)$  non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa, esistono due autovettori (non-nulli)  $V \in \mathbb{R}^d$  e  $v \in \mathbb{R}^d$  di  $\nabla^2 F(X_0)$  tali che

$$V \cdot \nabla^2 F(X_0)V > 0 \quad \text{e} \quad v \cdot \nabla^2 F(X_0)v < 0.$$

Di conseguenza, la funzione

$$t \mapsto F(X_0 + tV)$$

ha un minimo relativo stretto in  $t = 0$ , mentre la funzione

$$t \mapsto F(X_0 + tv)$$

ha un massimo relativo stretto in  $t = 0$ .  $X_0$  è quindi un punto di sella.  $\square$

**Teorema 6.** Siano  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$ ,  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  su  $\Omega$  e  $X_0 \in \Omega$ . Se

$$\nabla F(X_0) = 0 \quad \text{e} \quad \det(\nabla^2 F(X_0)) < 0,$$

allora  $X_0$  è un punto di sella per  $F$ .

*Dimostrazione.* Siano  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  i due autovalori (eventualmente uguali) della matrice simmetrica  $\nabla^2 F(X_0)$ . Siccome

$$\det(\nabla^2 F(X_0)) = \lambda_1 \lambda_2 < 0,$$

otteniamo che la matrice  $\nabla^2 F(X_0)$  è indefinita. Applicando il teorema precedente, abbiamo la tesi.  $\square$

**Osservazione 7.** Il teorema precedente non vale nelle dimensioni dispari.

Per esempio, se  $n$  è dispari, allora la matrice hessiana  $\nabla^2 F(0)$  della funzione

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(X) = -|X|^2,$$

ha determinante negativo, mentre l'origine è un punto di massimo globale per  $F$  in  $\mathbb{R}^n$ .

**Esercizio 8.** Siano  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  su  $\Omega$  e  $X_0 \in \Omega$ . Dimostrare che se  $n$  è pari,

$$\nabla F(X_0) = 0 \quad \text{e} \quad \det(\nabla^2 F(X_0)) < 0,$$

allora  $X_0$  è un punto di sella per  $F$ .

## ESEMPI

Possiamo riassumere i risultati delle sezioni precedenti come segue.

Supponiamo che  $\Omega$  sia aperto,  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sia una funzione di classe  $C^2$  e  $X_0 \in \Omega$  sia un punto critico per  $F$  (ovvero  $\nabla F(X_0) = 0$ ). Allora:

- se  $\nabla^2 F(X_0)$  è definita positiva, allora  $F$  ha un punto di minimo relativo in  $X_0$ ;
- se  $\nabla^2 F(X_0)$  è definita negativa, allora  $F$  ha un punto di massimo relativo in  $X_0$ ;
- se  $\nabla^2 F(X_0)$  è indefinita, allora  $F$  ha un punto di sella in  $X_0$ .

Se invece  $\nabla^2 F(X_0)$  è solo semi-definita positiva o semi-definita negativa, l'analisi al secondo ordine non è sufficiente per determinare il comportamento locale di  $F$  in un intorno di  $X_0$ .

**Esempio 9.** La funzione

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = x^4 + y^4$$

ha matrice hessiana nulla in  $(0, 0)$ , e  $(0, 0)$  è un punto di minimo per  $F$ .

**Esempio 10.** La funzione

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = -x^4 - y^4$$

ha matrice hessiana nulla in  $(0, 0)$ , e  $(0, 0)$  è un punto di massimo per  $F$ .

**Esempio 11.** La funzione

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = x^4 - y^4$$

ha matrice hessiana nulla in  $(0, 0)$ , e  $(0, 0)$  è un punto di sella per  $F$ .

### Simmetria

Dati un aperto  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^2$  e una funzione  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  su  $\Omega$ , la matrice hessiana  $\nabla^2 F$  è data da

$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F & \partial_{xy}F \\ \partial_{yx}F & \partial_{yy}F \end{pmatrix}$$

Osserviamo che siccome le derivate parziali seconde di  $F$  sono continue (per definizione di  $C^2(\Omega)$ ), il teorema di Schwarz implica che

$$\partial_{xy}F = \partial_{yx}F \quad \text{su} \quad \Omega.$$

Quindi, abbiamo ottenuto che:

se  $F \in C^2(\Omega)$ , allora la matrice  $\nabla^2 F$  è simmetrica.

### Analisi delle matrici hessiane

In ogni punto  $X_0 = (x_0, y_0)$  la matrice hessiana  $\nabla^2 F(x_0, y_0)$  può essere:

- *definita positiva;*
- *definita negativa;*
- *semi-definita positiva, ma non definita positiva;*
- *semi-definita negativa, ma non definita negativa;*
- *indefinita* (ovvero né semi-definita positiva, né semi-definita negativa).

Osserviamo che:

in generale, per determinare il carattere della matrice  $\nabla^2 F$  in un determinato punto  $(x_0, y_0)$ , non basta studiare il segno delle derivate parziali  $\partial_{xx}F(x_0, y_0)$  e  $\partial_{yy}F(x_0, y_0)$ .

**Esempio 12.** Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy.$$

In ogni punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , possiamo calcolare

$$\partial_{xx}F = 2 \quad e \quad \partial_{yy}F = 2.$$

Quindi, le derivate parziali  $\partial_{xx}F$  e  $\partial_{yy}F$  sono strettamente positive, ma la matrice hessiana  $\nabla^2 F$  non è definita positiva. Infatti, l'origine  $(0, 0)$  non è un punto di minimo locale. Per esempio, la funzione

$$t \mapsto F(t, -t) = -2t^2 \quad \text{per} \quad t \in \mathbb{R}$$

ha un punto di massimo stretto in  $t = 0$ .

In generale, per stabilire il segni di una matrice hessiana (di una funzione definita in  $\mathbb{R}^2$ ) useremo il teorema seguente.

**Teorema.** Sia  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  una matrice reale simmetrica  $2 \times 2$ . Allora,

(1)  $A$  è semi-definita positiva  $\Leftrightarrow a + c \geq 0, \det A = 0$ .

(2)  $A$  è definita positiva  $\Leftrightarrow a + c > 0, \det A > 0$ .

(3)  $A$  è semi-definita negativa  $\Leftrightarrow a + c \leq 0, \det A \geq 0$ .

(4)  $A$  è definita negativa  $\Leftrightarrow a + c < 0, \det A > 0$ .

(5)  $A$  è indefinita  $\Leftrightarrow \det A < 0$ .

## ESERCIZI

**Esercizio 13.** Per ciascuna delle funzioni  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- determinare i punti critici di  $F$ ;
- in ciascuno dei punti critici di  $F$  dire se la matrice hessiana  $\nabla^2 F$  è:
  - definita positiva;
  - semi-definita positiva, ma non definita positiva;
  - definita negativa;
  - semi-definita negativa, ma non definita negativa;
  - indefinita.
- determinare:
  - i minimi relativi di  $F$ ;
  - i massimi relativi di  $F$ ;
  - i punti di sella di  $F$ .

(1)  $F(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x + 4y$

(2)  $F(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy + 20x$

(3)  $F(x, y) = x^2 - y^2 + xy + 20x + 5y + 3$

(4)  $F(x, y) = x^2 + 3y^2 + 5xy + 20x + 5y + 3$

(5)  $F(x, y) = x^2 + 3y^2 + 3xy + 20x + 5y + 3$

(6)  $F(x, y) = 2x^2 + y^2 + 3xy + 20x + 5y + 3$

(7)  $F(x, y) = -2x^2 - y^2 + 2xy + 20x + 5y + 3$

(8)  $F(x, y) = e^{xy+y^2}$ .

---

## Dagli appelli precedenti

**Esercizio 14** (Gennaio 2021 - versione 1). Consideriamo la funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = ye^{2x} - \frac{8y}{e^x} + y^3$$

La funzione  $F$  ha un unico punto critico in  $\mathbb{R}^2$  che chiameremo  $A_0 = (x_0, y_0)$ .

- (a) Trovare le coordinate di  $A_0$ .
- (b) Calcolare la matrice Hessiana  $\nabla^2 F$  di  $F$  in  $A_0$ .
- (c) Dire se  $\nabla^2 F(A_0)$  è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.
- (d) Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punto  $A_0$ ?

**Esercizio 15** (Gennaio 2021 - versione 2). Consideriamo la funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = x^2y + xy - y^2x$$

Sia  $A_0 = (x_0, y_0)$  l'unico punto critico di  $F$  fra i punti

$$(1, 0), (-1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), (2, 0), (-2, 0) \text{ e } \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

Trovare  $(x_0, y_0)$  e dire quali fra le affermazioni seguenti sono vere.

- (a) Trovare le coordinate di  $A_0$ .
- (b) Calcolare la matrice Hessiana  $\nabla^2 F$  di  $F$  in  $A_0$ .
- (c) Dire se  $\nabla^2 F(A_0)$  è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.
- (d) Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punto  $A_0$ ?

**Esercizio 16** (Febbraio 2021 - versione 1). Consideriamo la funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = x^3 - \frac{1}{3}y^3 + xy - x^2$$

Sia  $A_0 = (x_0, y_0)$  l'unico punto critico di  $F$  fra i punti

$$(1, 1), (1, -1) \text{ e } (-1, 1).$$

- (1) Trovare  $(x_0, y_0)$ .
- (2) Calcolare la matrice hessiana  $\nabla^2 F(x_0, y_0)$  nel punto  $(x_0, y_0)$ .
- (3) Stabilire se nel punto  $(x_0, y_0)$  la matrice hessiana di  $\nabla^2 F$  è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, oppure indefinita.
- (4) Usando il punto precedente, determinare il comportamento della funzione  $F$  in un intorno del punto  $(x_0, y_0)$ .

**Esercizio 17** (Febbraio 2021 - versione 2). Consideriamo la funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + y^2$$

Sia  $A_0 = (x_0, y_0)$  l'unico punto critico di  $F$  fra i punti

$$(1, 1), (-1, 1) \text{ e } (-1, -1).$$

- (1) Trovare  $(x_0, y_0)$ .
- (2) Calcolare la matrice hessiana  $\nabla^2 F(x_0, y_0)$  nel punto  $(x_0, y_0)$ .
- (3) Stabilire se nel punto  $(x_0, y_0)$  la matrice hessiana di  $\nabla^2 F$  è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, oppure indefinita.
- (4) Usando il punto precedente, determinare il comportamento della funzione  $F$  in un intorno del punto  $(x_0, y_0)$ .

**Esercizio 18** (Aprile 2021 - versione 1). Consideriamo la funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = x^2y^2 - x^2 + 2xy + 2x$$

Sia  $A_0 = (x_0, y_0)$  l'unico punto critico di  $F$  fra i punti

$$(1, 0), (1, 1) \text{ e } (1, -1).$$

- (1) Trovare  $(x_0, y_0)$ .
- (2) Calcolare la matrice hessiana  $\nabla^2 F(x_0, y_0)$  nel punto  $(x_0, y_0)$ .
- (3) Stabilire se nel punto  $(x_0, y_0)$  la matrice hessiana di  $\nabla^2 F$  è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, oppure indefinita.
- (4) Usando il punto precedente, determinare il comportamento della funzione  $F$  in un intorno del punto  $(x_0, y_0)$ .

**Esercizio 19** (Aprile 2021 - versione 2). Consideriamo la funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x, y) = x^2y^2 - 2xy$$

Sia  $A_0 = (x_0, y_0)$  l'unico punto critico di  $F$  fra i punti

$$(1, 1), (-1, 1) \text{ e } (1, 0).$$

- (1) Trovare  $(x_0, y_0)$ .
- (2) Calcolare la matrice hessiana  $\nabla^2 F(x_0, y_0)$  nel punto  $(x_0, y_0)$ .
- (3) Stabilire se nel punto  $(x_0, y_0)$  la matrice hessiana di  $\nabla^2 F$  è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, oppure indefinita.
- (4) Usando il punto precedente, determinare il comportamento della funzione  $F$  in un intorno del punto  $(x_0, y_0)$ .

**Esercizio 20** (Giugno 2021). Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = x^3 + xy - y^2.$$

La funzione  $F$  ha esattamente due punti critici in  $\mathbb{R}^2$  :  $A_0 = (0, 0)$  e  $A_1 = (x_1, y_1)$ .

- (a) Calcolare la matrice Hessiana  $H = \nabla^2 F$  di  $F$  in  $A_0$ .
- (b) Dire se la matrice Hessiana  $\nabla^2 F(A_0)$  è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.
- (c) Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punto  $A_0$ , usando il risultato del punto precedente?
- (d) Trovare le coordinate  $(x_1, y_1)$  del punto critico  $A_1$ .
- (e) Calcolare la matrice Hessiana  $H = \nabla^2 F$  di  $F$  in  $A_1$ .
- (f) Dire se la matrice Hessiana  $\nabla^2 F(A_1)$  è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.
- (g) Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nel punto  $A_1$ , usando il risultato del punto precedente?

**Esercizio 21** (Giugno 2021). Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = x^4 + x^2y - y^3.$$

La funzione  $F$  ha esattamente tre punti critici in  $\mathbb{R}^2$  :

$$A_0 = (0, 0), \quad A_1 = (x_1, y_1) \quad e \quad A_2 = (x_2, y_2).$$

- (a) Trovare le coordinate dei punti critici  $A_1$  e  $A_2$ .
- (b) Calcolare la matrice Hessiana  $H = \nabla^2 F$  di  $F$  in  $A_1$  e  $A_2$ .
- (c) Per ciascuna delle matrici  $\nabla^2 F(A_1)$  e  $\nabla^2 F(A_2)$  dire se è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.
- (d) Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nei punti  $A_1$  e  $A_2$ , usando il risultato del punto precedente?

**Esercizio 22** (Luglio 2021). Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = x^2y - y^2x + 3x^2.$$

La funzione  $F$  ha esattamente due punti critici in  $\mathbb{R}^2$  :  $A_1 = (x_1, y_1)$  e  $A_2 = (x_2, y_2)$ .

- (a) Trovare le coordinate dei punti critici  $A_1$  e  $A_2$ .
- (b) Calcolare la matrice Hessiana  $H = \nabla^2 F$  di  $F$  in  $A_1$  e  $A_2$ .
- (c) Per ciascuna delle matrici  $\nabla^2 F(A_1)$  e  $\nabla^2 F(A_2)$  dire se è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.
- (d) Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nei punti  $A_1$  e  $A_2$ , usando il risultato del punto precedente?

**Esercizio 23** (Settembre 2021). *Consideriamo la funzione*

$$F(x, y) = x^2y^2 - 2y^2x + x.$$

*La funzione  $F$  ha esattamente due punti critici in  $\mathbb{R}^2$  :  $A_1 = (x_1, y_1)$  e  $A_2 = (x_2, y_2)$ .*

- (a) *Trovare le coordinate dei punti critici  $A_1$  e  $A_2$ .*
- (b) *Calcolare la matrice Hessiana  $H = \nabla^2 F$  di  $F$  in  $A_1$  e  $A_2$ .*
- (c) *Per ciascuna delle matrici  $\nabla^2 F(A_1)$  e  $\nabla^2 F(A_2)$  dire se è definita positiva, definita negativa, semi-definita positiva, semi-definita negativa, oppure indefinita.*
- (d) *Che cosa si può dire sul comportamento locale della funzione nei punti  $A_1$  e  $A_2$  usando il risultato del punto precedente?*