Esercizio sulla derivata di un polinomio di più variabili

Esercizio 1. *Sia*

$$P(x,y)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{k}a_{j,k}\,x^jy^{k-j}$$

un polinomio di due variabili a coefficienti reali: $a_{j,k}\in\mathbb{R}$*. Sia* (a,b) *un intervallo in* $\mathbb{R}$ *e siano*

$$x:(a,b)\to\mathbb{R}\qquad e\qquad y:(a,b)\to\mathbb{R}$$

due funzioni derivabili su (a,b)*. Dimostrare che la funzione composta*

$$P(x,y):(a,b)\to R$$

è derivabile su (a,b) *e per ogni* $t\in(a,b)$ *si ha*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big[P\big(x(t),y(t)\big)\Big]&=x'(t)\,\partial_xP\big(x(t),y(t)\big)+y'(t)\,\partial_yP\big(x(t),y(t)\big)\\&=\big(x'(t),y'(t)\big)\cdot\nabla P\big(x(t),y(t)\big).\end{aligned}$$

Esercizio 2. *Sia*

$$P(x,y)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{k}a_{j,k}\,x^jy^{k-j}$$

un polinomio di due variabili a coefficienti reali $\big(a_{j,k}\in\mathbb{R}\big)$*. Sia* (a,b) *un intervallo in* $\mathbb{R}$ *e siano*

$$x:(a,b)\to\mathbb{R}\qquad e\qquad y:(a,b)\to\mathbb{R}$$

due funzioni derivabili due volte su (a,b)*. Allora, la funzione composta*

$$P(x,y):(a,b)\to R$$

è derivabile due volte su (a,b) *e per ogni* $t\in(a,b)$ *si ha*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big[P\big(x(t),y(t)\big)\Big]=\big(x'',y''\big)\cdot\nabla P\big(x,y\big)+\big(x',y'\big)\begin{pmatrix}\partial_{xx}P(x,y)&\partial_{xy}P(x,y)\\\partial_{yx}P(x,y)&\partial_{yy}P(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix},$$

dove per semplicità abbiamo ommesso la variabile t*, ovvero nella formula di sopra*

$$x'=x'(t),\quad y'=y'(t),\quad y''=y''(t),\quad x''=x''(t)$$

e dove il polinomio P *e le sue derivate parziali sono calcolati nel punto* $(x,y)=\big(x(t),y(t)\big)$*.*

Soluzione di Esercizio 1. Per semplicità, scriviamo il polinomio P come

$$P(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j,$$

dove la sommatoria è finita ed i coefficienti a_{ij} sono numeri reali. In particolare, abbiamo

$$\partial_x P(x,y) = \partial_x \Big[\sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \Big] = \sum_{i,j} \partial_x \big[a_{ij} x^i y^j \big] = \sum_{i,j} a_{ij} \, i \, x^{i-1} y^j,$$

$$\partial_y P(x,y) = \partial_y \Big[\sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \Big] = \sum_{i,j} \partial_y \big[a_{ij} x^i y^j \big] = \sum_{i,j} a_{ij} \, j \, y^{j-1} x^i.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} x'(t) \, \partial_x P\big(x(t), y(t)\big) + y'(t) \, \partial_y P\big(x(t), y(t)\big) &= \sum_{i,j} a_{ij} \Big(y(t)^j \, i \, x(t)^i \, x'(t) + x(t)^i \, j \, y(t)^{j-1} \, y'(t) \Big) \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} \Big(y(t)^j \, \partial_t \big[x(t)^i \big] + x(t)^i \, \partial_t \big[y(t)^j \big] \Big) \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} \, \partial_t \Big[x(t)^i y(t)^j \Big] = \partial_t \Big(\sum_{i,j} a_{ij} \, x(t)^i y(t)^j \Big), \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. $\square$