Domini regolari

Domini regolari in $\mathbb{R}^d$

Definizione 1. *Sia $D \subset \mathbb{R}^d$. Diciamo che D è un dominio regolare di classe C^k, se D è compatto e per ogni punto $\bar{X} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d) \in \partial D$ esistono*

- *un indice $j = 1, \dots, d$ (per semplicità supponiamo che $j = d$);*
- *delle costanti $\varepsilon_1 > 0, \dots, \varepsilon_d > 0$;*
- *ed una funzione di classe C^k*

$$\eta : \big(\bar{x}_1 - \varepsilon_1, \bar{x}_1 + \varepsilon_1\big) \times \dots \times \big(\bar{x}_{d-1} - \varepsilon_{d-1}, \bar{x}_{d-1} + \varepsilon_{d-1}\big) \to \big(\bar{x}_d - \varepsilon_d, \bar{x}_d + \varepsilon_d\big),$$

tali che per ogni punto

$$X = (x_1, \dots, x_n)$$

del rettangolo

$$\mathcal{R} := \big(\bar{x}_1 - \varepsilon_1, \bar{x}_1 + \varepsilon_1\big) \times \dots \times \big(\bar{x}_{d-1} - \varepsilon_{d-1}, \bar{x}_{d-1} + \varepsilon_{d-1}\big) \times \big(\bar{x}_d - \varepsilon_d, \bar{x}_d + \varepsilon_d\big),$$

si ha:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} X \in \mathcal{R} \cap \operatorname{int}(D) & \Leftrightarrow & \eta(x_1, \dots, x_{d-1}) < x_d \ ; \\ X \in \mathcal{R} \cap \partial D & \Leftrightarrow & \eta(x_1, \dots, x_{d-1}) = x_d \ ; \\ X \in \mathcal{R} \setminus D & \Leftrightarrow & \eta(x_1, \dots, x_{d-1}) > x_d \ ; \end{array}}$$

oppure

$$\boxed{\begin{array}{rcl} X \in \mathcal{R} \cap \operatorname{int}(D) & \Leftrightarrow & \eta(x_1, \dots, x_{d-1}) > x_d \ ; \\ X \in \mathcal{R} \cap \partial D & \Leftrightarrow & \eta(x_1, \dots, x_{d-1}) = x_d \ ; \\ X \in \mathcal{R} \setminus D & \Leftrightarrow & \eta(x_1, \dots, x_{d-1}) < x_d \ . \end{array}}$$

Teorema 2. *Sia D un compatto in $\mathbb{R}^d$. Allora, D è un dominio regolare di classe C^k se e solo se esistono un aperto Ω che contiene D ed una funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^k tali che per ogni*

$$|\nabla F| \neq 0 \qquad su \qquad \partial D,$$

e per ogni $X \in \Omega$ si ha

$$\begin{array}{rcl} X \in \operatorname{int}(D) & \Leftrightarrow & F(X) < 0 \ ; \\ X \in \partial D & \Leftrightarrow & F(X) = 0 \ ; \\ X \in \Omega \setminus D & \Leftrightarrow & F(X) > 0 \ . \end{array}$$

Dimostrazione: In seguito useremo la notazione seguente. Per ogni n-upla

$$\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in (\mathbb{R}_+)^d$$

di numeri reali strettamente positivi e per ogni

$$X = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

definiamo il rettangolo

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(X) = \big(-\varepsilon_1 + x_1, x_1 + \varepsilon_1\big) \times \cdots \times \big(-\varepsilon_d + x_d, x_d + \varepsilon_d\big).$$

Inoltre, per semplicità, useremo anche la notazione

$$\mathcal{I}_{\varepsilon_j}(x_j) = \big(-\varepsilon_j + x_j, x_j + \varepsilon_j\big).$$

Step 1. Per ogni $X = (x_1, \dots, x_d) \in \mathrm{int}(D)$, esistono numeri reali strettamente positivi

$$\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in (\mathbb{R}_+)^d$$

tali che

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(X) \subset \mathrm{int}(D).$$

Step 2. Per ogni $X = (x_1, \dots, x_d) \in \partial D$, esistono numeri reali strettamente positivi

$$\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in (\mathbb{R}_+)^d,$$

una direzione j e una funzione di classe C_1

$$\eta : \Big(\mathcal{I}_{\varepsilon_1}(x_1) \times \cdots \times \mathcal{I}_{\varepsilon_{j-1}}(x_{j-1})\Big) \times \Big(\mathcal{I}_{\varepsilon_{j+1}}(x_{j+1}) \times \cdots \times \mathcal{I}_{\varepsilon_d}(x_d)\Big) \to \mathcal{I}_{\varepsilon_j}(x_j),$$

tali che, per ogni $Y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}}(X)$, abbiamo che

$$Y \in \partial D \quad \Leftrightarrow \quad \eta(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_d) = y_j.$$

Step 3. Costruzione di Ω. La famiglia di rettangoli

$$\Big\{\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(X) \ : \ X \in D\Big\}$$

è un ricoprimento del compatto D. Esiste quindi un sottoricoprimento finito

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}_1}(X_1), \mathcal{R}_{\mathcal{E}_2}(X_2), \dots, \mathcal{R}_{\mathcal{E}_n}(X_n)$$

Definiamo l'aperto

$$\Omega = \mathcal{R}_{\mathcal{E}_1}(X_1) \cup \cdots \cup \mathcal{R}_{\mathcal{E}_n}(X_n).$$

Step 4. Costruzione di F. Useremo il seguente lemma.

> **Lemma.** *Per ogni $j = 1, \dots, n$ esiste una funzione*
>
> $$\varphi_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$$
>
> *di classe C^1 e tale che*
>
> - $\varphi_j = 0$ *e* $|\nabla \varphi_j| = 0$ *in* $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{R}_{\mathcal{E}}(X)$;
> - $\varphi_j = 1$ *in* $\mathcal{R}_{\mathcal{E}/2}(X)$;
> - $0 < \varphi_j < 1$ *in* $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(X)$.

Per ogni j definiamo la funzione $F_j : \Omega \to \mathbb{R}$ come

- se $X_j \in \mathrm{int}(D)$, allora

$$F_j(X) = -\varphi_j(X).$$

- se $X_j \in \partial D$ e

$$D \cap \mathcal{R}_{\mathcal{E}_j}(X_j) = \Big\{ X \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}_j}(X_j) \ : \ \eta\big(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d\big) < x_j \Big\}$$

allora

$$F_j(X) = \varphi_j(X)\Big(\eta\big(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d\big) - x_j\Big).$$

- se $X_j \in \partial D$ e

$$D \cap \mathcal{R}_{\mathcal{E}_j}(X_j) = \Big\{ X \in \mathcal{R}_{\mathcal{E}_j}(X_j) \ : \ \eta\big(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d\big) > x_j \Big\}$$

allora

$$F_j(X) = \varphi_j(X)\Big(x_j - \eta\big(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d\big)\Big).$$

Osserviamo che per ogni funzione F_j abbiamo

$$F_j = 0 \quad \text{su} \quad \partial D \ , \qquad F_j \le 0 \quad \text{in} \quad \text{int}(D) \qquad \text{e} \qquad F_j \ge 0 \quad \text{in} \quad \Omega \setminus D.$$

Infine, definiamo

$$F := \sum_{j=1}^{n} F_j.$$

Vettore normale

Proposizione 3. *Sia $D \subset \mathbb{R}^d$ un dominio regolare di classe C^1. Allora, per ogni $X \in \partial D$, esiste un unico vettore unitario*

$$\nu(X) \in \mathbb{R}^d \, , \quad |\nu(X)| = 1$$

tale che

(i) *per ogni curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^d$ di classe C^1 a valori in ∂D e tale che $\alpha(0) = X$, si ha*

$$\nu(X) \cdot \alpha'(0) = 0.$$

(ii) *esiste $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo tale che*

$$\begin{cases} X + t\,\nu(X) \in \text{int}(D) & \textit{per} \qquad t \in (-\varepsilon, 0); \\ X + t\,\nu(X) \in \Omega \setminus D & \textit{per} \qquad t \in (0, \varepsilon). \end{cases}$$

Inoltre, la funzione

$$\nu : \partial D \to \mathbb{R}^d$$

è una funzione continua.

Dimostrazione: Sia F la funzione data da Teorema 2. Definiamo

$$\nu(X) = \frac{\nabla F(X)}{|\nabla F(X)|} \ .$$

La prima affermazione ora segue dal fatto che F è costante su ∂D, il che in particolare implica

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\alpha(t)) = \alpha'(0) \cdot \nabla F(\alpha(0)).$$

La seconda affermazione invece segue dal fatto che

$$F\big(X + t\nu(X)\big) = t|\nabla F(X)| + o(t).$$

Per mostrare l'unicità, supponiamo che in un intorno di X, ∂D è il grafico di una funzione η nella direzione x_d. Esistono quindi $n-1$ vettori linearmente indipendenti

$$v_i = \Big(0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0, \partial_i \eta\big(x_1, \dots, x_{d-1}\big)\Big) \qquad i = 1, \dots, d-1 \, ,$$

tali che

$$v_i \cdot \nu(X) = 0 \qquad \text{per ogni} \qquad i = 1, \dots, d-1 \, . \qquad \square$$

Il bordo dei domini regolari in $\mathbb{R}^2$

Proposizione 4. *Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio di classe C^1. Allora, esistono un numero finito di curve*

$$\sigma_i : [0, T_i] \to \Omega, \quad i = 1, \dots, n$$

tali che

- $\sigma_i : [0, T_i] \to \mathbb{R}^2$ *è di classe* C^1;
- *la funzione* $\sigma_i : [0, T_i) \to \mathbb{R}^2$ *è iniettiva;*
- $|\sigma_i'(t)| > 0$ *per ogni* $t \in [0, T_i]$;
- $\sigma_i(0) = \sigma_i(T_i)$ *e* $\sigma_i'(0) = \sigma_i'(T_i)$;
- $\partial D = \bigcup_{i=1}^{n} Im(\sigma_i)$;
- $Im(\sigma_i) \cap Im(\sigma_j) = \emptyset$ *per ogni coppia di indici diversi* $i \neq j$,

dove $Im(\sigma_i)$ *è il sostegno della curva* σ_i, *ovvero*

$$Im(\sigma_i) = \Big\{ \sigma_i(t) \ : \ t \in [0, T_i] \Big\}.$$

Orientazione in $\mathbb{R}^2$

Definizione 5. *Diciamo che la coppia dei vettori $u = (a, b)$ e $v = (A, B)$ è orientata positivamente, se*

$$\det \begin{pmatrix} a & A \\ b & B \end{pmatrix} = aB - bA > 0 \ .$$

Se invece

$$\det \begin{pmatrix} a & A \\ b & B \end{pmatrix} = aB - bA < 0$$

diremo che la coppia di vettori (u, v) è orientata negativamente.

Osservazione 6. *Se la coppia di vettori (u, v) è orientata positivamente, allora la coppia (v, u) è orientata negativamente e viceversa, se (u, v) è orientata negativamente, allora (v, u) è orientata positivamente.*

Osservazione 7 (Determinante e prodotto esterno)**.** *Dati due vettori $u = (a, b)$ e $v = (A, B)$, definiamo le 1-forme (a coefficienti costanti) associate*

$$a\,dx + b\,dy \qquad e \qquad A\,dx + B\,dy.$$

Osserviamo che

$$\Big(a\,dx + b\,dy\Big) \wedge \Big(A\,dx + B\,dy\Big) = \Big(aB - bA\Big)\,dx \wedge dy = \det \begin{pmatrix} a & A \\ b & B \end{pmatrix} dx \wedge dy\,.$$

Parametrizzazione del bordo di un dominio regolare

Definizione 8. *Siano $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare (con bordo di classe C^1), (x_0, y_0) un punto del bordo ∂D. Diremo che la curva $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ parametrizza il bordo ∂D in un intorno del punto (x_0, y_0), se:*

- *esiste $r > 0$ tale che*
$$\big\{\gamma(t) \ : \ t \in (a,b)\big\} = B_r(x_0, y_0) \cap \partial D.$$
- *$|\gamma'(t)| > 0$ per ogni $t \in (a,b)$.*

Definizione 9. *Siano $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare (con bordo di classe C^1), (x_0, y_0) un punto del bordo e sia $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ una curva che parametrizza il bordo ∂D in un intorno del punto (x_0, y_0)*

- *Diremo che*

  γ è orientata positivamente (rispetto a D),

  oppure che

  γ parametrizza il bordo di D in senso antiorario,

  se la coppia (versore normale, versore tangente)
$$\Big(\nu_D(\gamma(t))\,,\ \gamma'(t)\Big)$$
  è orientata positivamente per ogni $t \in (a,b)$, dove $\nu_D(\gamma(t))$ è il versore normale uscente da D.

- *Diremo che*

  γ è orientata negativamente (rispetto a D),

  oppure che

  γ parametrizza il bordo di D in senso orario,

  se la coppia (versore normale, versore tangente)
$$\Big(\nu_D(\gamma(t))\,,\ \gamma'(t)\Big)$$
  è orientata negativamente per ogni $t \in (a,b)$, dove $\nu_D(\gamma(t))$ è il versore normale uscente da D.

Esempio 10. *La curva*
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$
parametrizza il bordo di B_1 in senso antioratio (quindi positivamente risp. a B_1).

Esempio 11. *La curva*
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \gamma(t) = (\cos t, -\sin t)$$
parametrizza il bordo di B_1 in senso orario (quindi negativamente risp. a B_1).

Esempio 12. *Sia D il dominio $\overline{B}_2 \setminus B_1$. Allora, il bordo di D è dato da*

$$\partial D \;=\; \partial B_2 \cup \partial B_1 .$$

- *La curva*

$$\gamma_{int} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \gamma_{int}(t) = (\cos t,\, \sin t)$$

parametrizza la porzione ∂B_1 del bordo ∂D in senso orario (quindi negativamente risp. a D).

- *La curva*

$$\gamma_{ext} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \gamma_{ext}(t) = (2\cos t,\, 2\sin t)$$

parametrizza la porzione ∂B_2 del bordo ∂D in senso antiorario (quindi positivamente risp. a D).

Osservazione 13 (Le curve equivalenti hanno la stessa orientazione)**.** *Siano*

- *D un dominio C^1 e (x_0, y_0) un punto del bordo ∂D ;*
- *$\gamma : (A, B) \to \mathbb{R}^2$ una curva C^1 tale che*

$$|\gamma'(T)| > 0 \quad \textit{per ogni} \quad T \in (A, B) \ ;$$

- *$\alpha : (a, b) \to (A, B)$ una funzione C^1 (derivabile con derivata continua) tale che*

$$\alpha'(t) > 0 \quad \textit{per ogni} \quad t \in (A, B) \ ;$$

- *$\sigma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ la curva*

$$\sigma(t) = \gamma(\alpha(t)) \quad \textit{per ogni} \quad t \in (a, b) \ .$$

(Ricordiamo che due curve γ e σ con queste proprietà sono *equivalenti.*)

Allora, γ parametrizza il bordo ∂D in un intorno del punto (x_0, y_0), se e solo se σ parametrizza il bordo ∂D in un intorno di (x_0, y_0). Inoltre,

(i) *γ è orientata positivamente se e solo se σ lo è ;*

(ii) *γ è orientata negativamente se e solo se σ lo è .*

Osservazione 14 (Le curve opposte hanno orientazione opposta)**.** *Se $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ parametrizza il bordo ∂D in un intorno del punto (x_0, y_0), allora anche la curva*

$$\gamma_- : (a, b) \to \mathbb{R}, \qquad \gamma_-(t) = \gamma(a + b - t),$$

parametrizza il bordo ∂D in un intorno di (x_0, y_0). Inoltre,

(i) *se γ è orientata positivamente, allora γ_- è orientata negativamente ;*

(ii) *viceversa, se γ è orientata negativamente, allora γ_- è orientata positivamente .*

Orientazione e diffeomorfismi

Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti connessi di $\mathbb{R}^2$ e sia $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ un diffeomorfismo C^1, ovvero :

- la mappa $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ è di classe C^1 ;
- $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ è bigettiva ;
- la sua inversa $\Psi : \Omega_2 \to \Omega_1$ è di classe C^1 .

Lemma 15. *Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti connessi in $\mathbb{R}^2$ e sia $\Phi = (u, v) : \Omega_1 \to \Omega_2$ un diffeomorfismo C^1. Allora*

$$\det(D\Phi) := \det\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} > 0 \quad \textit{dappertutto in} \quad \Omega_1\ ,$$

oppure

$$\det(D\Phi) := \det\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} < 0 \quad \textit{dappertutto in} \quad \Omega_1\ .$$

Dimostrazione: Sia $\Psi = (f, g) : \Omega_2 \to \Omega_1$ l'inversa di Φ, ovvero f e g sono tali che

$$\begin{cases} f\big(u(x,y), v(x,y)\big) = x \\ g\big(u(x,y), v(x,y)\big) = y \end{cases}$$

per ogni punto $(x, y) \in \Omega_1$. Allora, derivando in x e in y abbiamo

$$\begin{aligned} &\partial_x\big[f\big(u(x,y), v(x,y)\big)\big] = 1 \qquad && \partial_y\big[f\big(u(x,y), v(x,y)\big)\big] = 0 \\ &\partial_x\big[g\big(u(x,y), v(x,y)\big)\big] = 0 \qquad && \partial_y\big[g\big(u(x,y), v(x,y)\big)\big] = 1 \end{aligned}$$

che possiamo scrivere come

$$\begin{aligned} &\partial_x u\, \partial_u f(u,v) + \partial_x v\, \partial_v f(u,v) = 1 \qquad && \partial_y u\, \partial_u f(u,v) + \partial_y v\, \partial_v f(u,v) = 0 \\ &\partial_x u\, \partial_u g(u,v) + \partial_x v\, \partial_v g(u,v) = 0 \qquad && \partial_y u\, \partial_u g(u,v) + \partial_y v\, \partial_v g(u,v) = 1 \end{aligned}$$

In particolare,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 &= \Big(\partial_x u\, \partial_u f(u,v) + \partial_x v\, \partial_v f(u,v)\Big)\Big(\partial_y u\, \partial_u g(u,v) + \partial_y v\, \partial_v g(u,v)\Big) \\ &\quad - \Big(\partial_y u\, \partial_u f(u,v) + \partial_y v\, \partial_v f(u,v)\Big)\Big(\partial_x u\, \partial_u g(u,v) + \partial_x v\, \partial_v g(u,v)\Big) \\ &= \Big(\partial_x u\, \partial_u f(u,v)\, \partial_y v\, \partial_v g(u,v) + \partial_x v\, \partial_v f(u,v)\, \partial_y u\, \partial_u g(u,v)\Big) \\ &\quad - \Big(\partial_y u\, \partial_u f(u,v)\, \partial_x v\, \partial_v g(u,v) + \partial_y v\, \partial_v f(u,v)\, \partial_x u\, \partial_u g(u,v)\Big) \\ &= \det\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} \partial_u f(u,v) & \partial_v f(u,v) \\ \partial_u g(u,v) & \partial_v g(u,v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il che vuol dire che

$$\det\begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

non si annula mai su Ω_1. Di conseguenza (siccome Ω_1 è connesso per archi!) la funzione

$$(x,y) \mapsto \det\begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \partial_y u(x,y) \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{pmatrix}$$

non cambia segno in Ω_1 $\square$

Definizione 16. *Siano* Ω_1 *e* Ω_2 *due aperti connessi di* $\mathbb{R}^2$ *e sia* $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ *un diffeomorfismo* C^1*.*

- *Se* $\det(D\Phi) > 0$ *diremo che* Φ *preserva l'orientazione ;*
- *Se* $\det(D\Phi) < 0$ *diremo che* Φ *rovescia l'orientazione .*

Dimostreremo il seguente teorema

Teorema 17. *Siano* Ω_1 *e* Ω_2 *due aperti connessi in* $\mathbb{R}^2$ *e sia*

$$\Phi = (u, v) : \Omega_1 \to \Omega_2$$

un diffeomorfismo di classe C^1*. Siano*

- D *un dominio di classe* C^1 *incluso in* Ω_1*;*
- $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ *una curva di classe* C^1 *che parametrizza il bordo* ∂D *in senso orario in un intorno del punto* $\gamma(0) = (x_0, y_0) \in \partial D$*.*

Allora $\Phi(D)$ *è un dominio di classe* C^1 *e il suo bordo è parametrizzato dalla curva*

$$\Phi \circ \gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$$

in un intorno del punto $\Phi(x_0, y_0)$*. Inoltre,*

(i) *se* Φ *preserva l'orientazione, ovvero*

$$\det(D\Phi) = \det \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} > 0 \quad in \quad \Omega_1 \ ,$$

allora la curva $\Phi \circ \gamma$ *è orientata positivamente ;*

(ii) *se invece* Φ *rovescia l'orientazione, ovvero*

$$\det(D\Phi) = \det \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} < 0 \quad in \quad \Omega_1 \ ,$$

allora la curva $\Phi \circ \gamma$ *è orientata negativamente .*

Per dimostrare il teorema avremo bisogno del lemma seguente.

Lemma 18. *Sia* $D \subset \mathbb{R}^2$ *un dominio di classe* C^1 *e* $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ *una curva di classe* C^1 *tale che :*

- $|\gamma'(t)| > 0$ *per ogni* $t \in (a, b)$ *;*
- $\gamma(t) \in \partial D$ *per ogni* $t \in (a, b)$ *;*
- *esiste* $t_0 \in (a, b)$ *tale che* $\gamma(t_0) := (x_0, y_0) \in \partial D$*.*

Sia $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ *una curva di classe* C^1 *tale che:*

- $|\sigma'(0)| \neq 0$ *;*
- *i vettori* $\sigma'(0)$ *e* $\gamma'(0)$ *non sono colineari;*
- $\sigma(0) = (x_0, y_0) \in \partial D$ *;*
- $\sigma(t) \in \mathrm{int}(D)$ *quando* $t < 0$ *;*
- $\sigma(t) \notin D$ *quando* $t > 0$ *.*

Se ν *è la normale uscente nel punto* (x_0, y_0)*, allora i determinanti*

$$\det\big(\sigma'(0); \gamma'(t_0)\big) \qquad e \qquad \det\big(\nu; \gamma'(t_0)\big)$$

sono entrambi non nulli ed hanno lo stesso segno. In particolare, sono vere le affermazioni seguenti.

(i) *Se la coppia di vettori* $\big(\sigma'(0)\,,\,\gamma'(t_0)\big)$ *è orientata positivamente, allora la curva* γ *è orientata positivamente (rsip. a* D*) in un intorno di* (x_0, y_0).

(ii) *Se la coppia di vettori* $\big(\sigma'(0)\,,\,\gamma'(t_0)\big)$ *è orientata negativamente, allora la curva* γ *è orientata negativamente (rsip. a* D*) in un intorno di* (x_0, y_0).

Dimostrazione del lemma. I vettori ν e $\gamma'(t_0)$ sono una base in $\mathbb{R}^2$. Esistono quindi costanti a e b tali che

$$\sigma'(0) = a\nu + b\gamma'(t_0).$$

Inoltre, siccome $\sigma'(0)$ e $\gamma'(t_0)$ non sono colineari, abbiamo che $a \neq 0$. In particolare,

$$\det\big(\sigma'(0);\gamma'(t_0)\big) = \det\big(a\nu + \gamma'(t_0)\,;\,\gamma'(t_0)\big) = a\det\big(\nu\,;\,\gamma'(t_0)\big).$$

Quindi basta provare che $a > 0$. Sia F la funzione data dal Teorema 2. Allora, per ipotesi, abbiamo

$$\begin{cases} F\big(\sigma(t)\big) > 0 & \text{per} \quad t > 0, \\ F\big(\sigma(t)\big) < 0 & \text{per} \quad t < 0. \end{cases}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} F\big(\sigma(t)\big) &= t\,\sigma'(0)\cdot\nabla F(x_0, y_0) + o(t) \\ &= t\,\big(a\nu + b\gamma'(t_0)\big)\cdot\nabla F(x_0, y_0) + o(t) \\ &= at\,\nu\cdot\nabla F(x_0, y_0) + o(t) \\ &= at\,|\nabla F(x_0, y_0)| + o(t), \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato che

$$\nu = \frac{\nabla F(x_0, y_0)}{|\nabla F(x_0, y_0)|}\ .$$

Di conseguanza, abbiamo che necessariamente $a > 0$. $\square$

Dimostrazione del teorema: Sia $\nu = (a, b)$ il versore normale a ∂D uscente da D. Consideriamo la curva

$$\sigma(t) = (x_0, y_0) + t\nu.$$

Ricordiamo che

- $\sigma(t) \in \mathrm{int}(D)$ se $t < 0$;
- $\sigma(t) \in \mathbb{R}^d \setminus D$ se $t > 0$.

Allora anche la curva

$$\Phi(\sigma(t)) = \big(u(x_0 + ta, y_0 + tb)\,,\,v(x_0 + ta, y_0 + tb)\big)$$

è tale che

- $\Phi(\sigma(t)) \in \mathrm{int}(\Phi(D))$ se $t < 0$;
- $\Phi(\sigma(t)) \in \mathbb{R}^d \setminus \Phi(D)$ se $t > 0$.

Ora, calcoliamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\Phi(\sigma(t)) = \Big(a\,\partial_x u + b\,\partial_y u\,,\,a\,\partial_x v + b\,\partial_y v\Big)$$

e, scrivendo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\Phi(\gamma(t)) = \Big(x'(0)\,\partial_x u + y'(0)\,\partial_y u\,,\,x'(0)\,\partial_x v + y'(0)\,\partial_y v\Big)$$

dove tutte le derivate parziali $\partial_x u$, $\partial_y u$, $\partial_x v$, $\partial_y v$ sono calcolate nel punto $\gamma(0) = \sigma(0) = (x_0, y_0)$. Ora calcoliamo

$$
\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a\,\partial_x u + b\,\partial_y u & a\,\partial_x v + b\,\partial_y v \\ x'(0)\,\partial_x u + y'(0)\,\partial_y u & x'(0)\,\partial_x v + y'(0)\,\partial_y v \end{pmatrix} &= \Big(a\,\partial_x u + b\,\partial_y u\Big)\Big(x'(0)\,\partial_x v + y'(0)\,\partial_y v\Big) \\
&\quad - \Big(a\,\partial_x v + b\,\partial_y v\Big)\Big(x'(0)\,\partial_x u + y'(0)\,\partial_y u\Big) \\
&= \Big(a\,y'(0)\,\partial_x u\,\partial_y v + b\,x'(0)\,\partial_y u\,\partial_x v\Big) \\
&\quad - \Big(a\,y'(0)\,\partial_x v\,\partial_y u + b\,x'(0)\,\partial_y v\,\partial_x u\Big) \\
&= \Big(a\,y'(0) - b\,x'(0)\Big)\Big(\partial_x u\,\partial_y v - \partial_x v\,\partial_y u\Big) \\
&= \det \begin{pmatrix} a & b \\ x'(0) & y'(0) \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

il che conclude la dimostrazione del teorema. $\square$