

## Teorema della funzione implicita

### TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA

**Teorema 1** (Teorema di Dini). *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  che contiene l'origine  $(0,0)$  e sia  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1(\Omega)$  tale che*

$$F(0,0) = 0 \quad e \quad \partial_x F(0,0) \neq 0.$$

*Allora esistono due costanti  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\delta_0 > 0$  ed una funzione*

$$\eta : [-\delta_0, \delta_0] \rightarrow \mathbb{R}$$

*tali che:*

- (i)  $-\varepsilon_0 < \eta(t) < \varepsilon_0$  per ogni  $t \in [-\delta_0, \delta_0]$ ;
- (ii) il grafico di  $\eta$  coincide con l'insieme di livello

$$\mathcal{N}_F = \left\{ (x, y) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [-\delta_0, \delta_0] : F(x, y) = 0 \right\},$$

*ovvero, per ogni  $(x, y) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [-\delta_0, \delta_0]$ , vale che*

$$F(x, y) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = \eta(y);$$

- (iii)  $\eta$  è continua su  $[-\delta_0, \delta_0]$  e  $\eta(0) = 0$ ;
- (iv)  $\eta$  è di classe  $C^1$  su  $(-\delta_0, \delta_0)$ .

**Lemma 2** (Continuità di  $\eta$ ). *Sia  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Supponiamo che*

$$\eta : [-\delta_0, \delta_0] \rightarrow \mathbb{R}$$

*sia una funzione con la proprietà seguente. Esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che:*

- (i)  $-\varepsilon_0 \leq \eta(t) \leq \varepsilon_0$  per ogni  $t \in [-\delta_0, \delta_0]$ ;
- (ii) per ogni  $(x, y) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [-\delta_0, \delta_0]$ , vale che

$$F(x, y) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = \eta(y);$$

*Allora,  $\eta$  è continua su  $[-\delta_0, \delta_0]$ .*

**Dimostrazione:** Sia  $y_n \in [-\delta_0, \delta_0]$  una successione convergente ad un certo  $y_\infty \in [-\delta_0, \delta_0]$ . Definiamo

$$x_n = \eta(y_n)$$

e supponiamo per assurdo che  $x_n$  non converga a  $\eta(y_\infty)$ . Esistono allora  $c > 0$  e una sottosuccessione  $x_{n_k}$  tali che

$$|x_{n_k} - \eta(y_\infty)| \geq c \quad \text{per ogni} \quad k > 0.$$

Per la proprietà (i), la successione  $x_{n_k}$  è limitata e quindi esiste una sottosuccessione  $x_{n_{k_j}}$  convergente ad un certo  $x_\infty \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ . Siccome  $F$  è continua, abbiamo che

$$0 = F(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) \rightarrow F(x_\infty, y_\infty),$$

e quindi

$$F(x_\infty, y_\infty) = 0.$$

Ma allora, per (ii),

$$x_\infty = \eta(y_\infty).$$

□

**Lemma 3** (Derivabilità di  $\eta$ ). Sia  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$ . Supponiamo che

$$\eta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

sia una funzione continua tale che

$$\begin{aligned} F(\eta(t), t) &= \text{costante} && \text{per ogni } t \in (a, b), \\ e \quad \partial_x F(\eta(t), t) &> 0 && \text{per ogni } t \in (a, b). \end{aligned}$$

Allora,  $\eta$  è derivabile su  $(a, b)$ , la sua derivata è continua su  $(a, b)$  e

$$\eta'(t) \partial_x F(\eta(t), t) + \partial_y F(\eta(t), t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in (a, b).$$

**Dimostrazione:** Sia  $t \in (a, b)$  e sia  $s$  abbastanza piccolo. Allora

$$\begin{aligned} 0 &= F(\eta(t+s), t+s) - F(\eta(t), t) \\ &= F(\eta(t+s), t+s) - F(\eta(t), t+s) \\ &\quad + F(\eta(t), t+s) - F(\eta(t), t) \\ &= (\eta(t+s) - \eta(t)) \partial_x F(\kappa(t, s), t+s) + s \partial_y F(\eta(t), h(t, s)), \end{aligned}$$

dove  $\kappa(t, s)$  sta tra  $\eta(t+s)$  e  $\eta(t)$ , e  $h(t, s)$  è compreso tra  $t+s$  e  $t$ . Dividendo tutto per  $s$  abbiamo

$$\frac{\eta(t+s) - \eta(t)}{s} = - \frac{\partial_y F(\eta(t), h(t, s))}{\partial_x F(\kappa(t, s), t+s)}.$$

Passando al limite per  $s \rightarrow 0$ , abbiamo la tesi. □

### TEOREMA DEI MULTIPLICATORI DI LAGRANGE

**Teorema 4** (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange). Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^d$  e siano  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  e  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni di classe  $C^1(\Omega)$ . Sia  $\mathcal{N}_G$  l'insieme

$$\mathcal{N}_G = \{X \in \Omega : G(X) = 0\}.$$

Se  $X_0 \in \mathcal{N}_G$  è un punto di massimo (o minimo) relativo per la funzione  $F$  su  $\mathcal{N}_G$ , allora è vera una delle affermazioni seguenti :

- (a)  $\nabla G(X_0) = 0$ ;
- (b) esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $\nabla F(X_0) - \lambda \nabla G(X_0) = 0$ .

**Dimostrazione in dimensione due.** Sia  $X_0 = (x_0, y_0)$ . Supponiamo che  $\nabla G(x_0, y_0) \neq 0$ . Allora,

$$\partial_x G(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{oppure} \quad \partial_y G(x_0, y_0) \neq 0.$$

Senza perdita di generalità, possiamo supporre che  $\partial_x G(x_0, y_0) \neq 0$ . Per il teorema della funzione implicita, esistono  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  ed una funzione

$$\eta : (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \rightarrow (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

tale che dato un punto

$$(x, y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta),$$

si ha che

$$G(x, y) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = \eta(y).$$

Ora, siccome  $F : \mathcal{N}_G \rightarrow \mathbb{R}$  ha un minimo relativo in  $(x_0, y_0)$ , abbiamo che la funzione

$$y \mapsto F(\eta(y), y)$$

ha un minimo relativo in  $y_0$ . Di conseguenza,

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dy} \right|_{y=y_0} F(\eta(y), y) = \eta'(y_0) \partial_x F(\eta(y_0), y_0) + \partial_y F(\eta(y_0), y_0) \\ &= \eta'(y_0) \partial_x F(x_0, y_0) + \partial_y F(x_0, y_0) \\ &= -\frac{\partial_y G(x_0, y_0)}{\partial_x G(x_0, y_0)} \partial_x F(x_0, y_0) + \partial_y F(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (*)$$

Cerchiamo  $\lambda$  tale che

$$\begin{cases} \partial_x F(x_0, y_0) = \lambda \partial_x G(x_0, y_0) \\ \partial_y F(x_0, y_0) = \lambda \partial_y G(x_0, y_0). \end{cases}$$

Scegliamo

$$\lambda := \frac{\partial_x F(x_0, y_0)}{\partial_x G(x_0, y_0)}.$$

In questo modo, la prima uguaglianza è automaticamente soddisfatta; la seconda segue da (\*).  $\square$

**Esercizio 5.** Per ogni  $a > 0$  ed ogni  $b > 0$ , consideriamo il rettangolo  $\mathcal{R}_{ab} = [0, a] \times [0, b]$ . Il perimetro e l'area di  $\mathcal{R}_{ab}$  sono dati rispettivamente da

$$\text{Per}(\mathcal{R}_{ab}) = 2a + 2b \quad e \quad \text{Area}(\mathcal{R}_{ab}) = ab.$$

Sia  $P > 0$ . Fra tutti i rettangoli di perimetro  $P$  trovare quello con area più grande.

**Esercizio 6.** Trovare il massimo ed il minimo della funzione  $F$  sull'insieme  $D$ .

- (1)  $F(x, y) = x^3 - xy^2 - x + 1$ ;  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ ;
- (2)  $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ ;  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ ;
- (3)  $F(x, y) = x^3 - y^3$ ;  $D = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 = 1\}$ ;
- (4)  $F(x, y) = x^3 - xy^2$ ;  $D = \{(x, y) : 2x^2 + y^2 = 1\}$ ;
- (5)  $F(x, y) = xy$ ;  $D = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 = 1\}$ ;
- (6)  $F(x, y) = x^2 + xy$ ;  $D = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 = 1\}$ ;
- (7)  $F(x, y) = x^2 + xy$ ;  $D = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 = 1\}$ .

**Esercizio 7.** Trovare il massimo ed il minimo della funzione  $F$  sulla sfera

$$\partial B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

- (1)  $F(x, y, z) = x + y + z$ ;
- (2)  $F(x, y, z) = xyz$ ;
- (3)  $F(x, y, z) = xy + yz + zx$ ;
- (4)  $F(x, y, z) = xy$ ;
- (5)  $F(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ .