

---

**Prova scritta – 16/07/2024**

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

---

Nome:

---

Cognome:

---

**Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)**

**Esercizio 1.** Consideriamo gli insiemi

$$(A) \Omega_A = \{(x, y) : xy \geq 0\} \cap \overline{B}_1(0, 0) ; \quad (D) \Omega_D = \{(x, y) : xy > 0\} \cup B_1(0, 0) ;$$

$$(B) \Omega_B = \{(x, y) : xy \geq 0\} \cap B_1(0, 0) ; \quad (E) \Omega_E = \{(x, y) : xy > 0\} \setminus \overline{B}_1(0, 0) ;$$

$$(C) \Omega_C = \{(x, y) : xy \geq 0\} \cup \overline{B}_1(0, 0) ; \quad (F) \Omega_F = \{(x, y) : xy > 0\} \setminus B_1(0, 0) .$$

---

*Gli insiemi seguenti sono compatti:*

*Gli insiemi seguenti sono aperti:*

*Gli insiemi seguenti non sono né aperti, né compatti:*

---

**Esercizio 2.** Trovare la frontiera dell'insieme

$$D = B_1(0, 0) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$$

$$\partial D =$$

---

**Esercizio 3.** Sviluppare fino al secondo ordine in  $(0, 0)$  la funzione

$$\frac{e^{x+y}}{\sqrt{1+2y}} =$$

---

**Esercizio 4.** Siano  $\gamma(t) = (\sin(2t)\sqrt{1+3t}, \sqrt{1+3t} - \cos(5t))$  e  $F(x, y) = \frac{\sin(3x+2y)}{\cos(2x+3y)}$ .

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

---

**Esercizio 5.** Calcolare, al variare del parametro  $A \in \mathbb{R}$ , la matrice hessiana  $H$  della funzione  $F(x, y) = \frac{\cos(x + Ay)}{1 - xy}$  nel punto  $(0, 0)$ .

$H =$

Per quali valori di  $A$  la matrice  $H$  è definita negativa?

---

**Esercizio 6.** Sia  $\alpha = (-y^3 - x^2y + x^2) dx + (xy^2 + x^3) dy$  e sia  $\gamma$  la curva semplice chiusa e  $C^1$  a tratti che parametrizza in senso antiorario il bordo di  $\Omega = B_1(0, 0) \cap \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ .

Calcolare  $\int_{\gamma} \alpha =$

---

**Esercizio 7.** Consideriamo il campo  $F(x, y) = \left( \frac{x + 3y - 7y^2}{2(x^2 + y^2) + 1}, \frac{1 + x - 2y}{x^2 + y^2 + 3} \right)$ .

Dato l'insieme  $\Omega = B_1(0, 0)$ , calcolare  $\iint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y) dx dy =$

---

**Parte 2.** Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

---

**Esercizio 8.** Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = (x^3 + 3y)e^{x+y}.$$

Trovare i punti critici di  $F$  in  $\mathbb{R}^2$ . Studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

---

**Esercizio 9.** Mostrare che l'estremo superiore  $\sup_D F$  della funzione

$$F(x, y, z) = x + y + z,$$

sull'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (x + y - z)^2 + z^2 \leq 5\}.$$

è raggiunto sul bordo  $\partial D$  e trovarlo.

---

**Esercizio 10.** Data la funzione

$$F(x, y) = \frac{xy \sin(x)}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

trovare  $\limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$ .

---

**Esercizio 11.** Consideriamo la funzione

$$F(0, 0) = 0 \quad e \quad F(x, y) = \frac{(x + x^3)^{n+4}(y + y^2)^{n+6}}{(x^2 + y^2)^{2n} \cos(xy)} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0).$$

Per quali valori del parametro intero  $n \geq 1$  la funzione  $F$  è differenziabile in  $(0, 0)$ ?

---