Prova scritta – 16/07/2024

Non è consetito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

(A) $\Omega_A = \Big\{(x,y) \;:\; xy \geq 0\Big\} \cap \overline{B}_1(0,0)$;

(B) $\Omega_B = \Big\{(x,y) \;:\; xy \geq 0\Big\} \cap B_1(0,0)$;

(C) $\Omega_C = \Big\{(x,y) \;:\; xy \geq 0\Big\} \cup \overline{B}_1(0,0)$;

(D) $\Omega_D = \Big\{(x,y) \;:\; xy > 0\Big\} \cup B_1(0,0)$;

(E) $\Omega_E = \Big\{(x,y) \;:\; xy > 0\Big\} \setminus \overline{B}_1(0,0)$;

(F) $\Omega_F = \Big\{(x,y) \;:\; xy > 0\Big\} \setminus B_1(0,0)$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti:** A

Gli insiemi seguenti sono **aperti:** D, E

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti:** B, C, F

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = B_1(0,0) \cap \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x+y < 1\Big\}$$

$\partial D = \Big\{(x, 1-x) : x \in [0,1]\Big\} \cup \Big\{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in \Big[\frac{\pi}{2}, 2\pi\Big]\Big\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^{x+y}}{\sqrt{1+2y}} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + o(x^2+y^2)$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\sin(2t)\sqrt{1+3t}\,,\ \sqrt{1+3t} - \cos(5t)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{\sin(3x+2y)}{\cos(2x+3y)}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) = 9$$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro* $A \in \mathbb{R}$, *la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{\cos(x+Ay)}{1-xy}$ *nel punto* $(0,0)$.

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1-A \\ 1-A & -A^2 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di A *la matrice* H *è* **definita negativa**?

$A > 1/2$

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (-y^3 - x^2y + x^2)\,dx + (xy^2 + x^3)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *a tratti che parametrizza in senso antiorario il bordo di* $\Omega = B_1(0,0) \cap \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$.

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \frac{\pi}{2}$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\dfrac{x + 3y - 7y^2}{2(x^2+y^2)+1}, \dfrac{1+x-2y}{x^2+y^2+3} \right)$.

Dato l'insieme $\Omega = B_1(0,0)$, *calcolare* $\displaystyle\iint_\Omega \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = -\frac{\pi}{6}$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = (x^3 + 3y)e^{x+y}.$$

$(1, -\frac{4}{3})$ – minimo relativo

$(-1, -\frac{2}{3})$ – punto di sella

Trovare i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$. *Studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 9. *Mostrare che l'estremo superiore* $\sup_D F$ *della funzione*

$$F(x,y,z) = x + y + z,$$

sull'insieme

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + (x+y-z)^2 + z^2 \le 5 \right\}.$$

è raggiunto sul bordo ∂D *e trovarlo.*

$\sup_D F = 5 = F(0,3,2)$

Esercizio 10. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy \sin(x)}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

trovare $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

$\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Esercizio 11. *Consideriamo la funzione*

$$F(0,0) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{(x+x^3)^{n+4}(y+y^2)^{n+6}}{(x^2+y^2)^{2n}\cos(xy)} \quad se\ (x,y) \neq (0,0).$$

Per quali valori del parametro intero $n \ge 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$?

$n = 1, 2, 3, 4.$
