
Prova scritta – 29/6/2024

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. Consideriamo gli insiemi

$$(A) \Omega_A = B_1(0,0) \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}; \quad (D) \Omega_D = \overline{B}_1(0,0) \setminus \{(x,0) : x \geq 0\};$$

$$(B) \Omega_B = B_1(0,0) \cup \{(x,0) : x \geq 0\}; \quad (E) \Omega_E = \overline{B}_1(0,0) \cup \{(x,0) : x \geq 0\};$$

$$(C) \Omega_C = B_1(0,0) \cap \{(x,0) : x \geq 0\}; \quad (F) \Omega_F = \overline{B}_1(0,0) \cap \{(x,0) : x \geq 0\}.$$

Gli insiemi seguenti sono **compatti**:

Gli insiemi seguenti sono **aperti**:

Gli insiemi seguenti non sono né aperti, né compatti:

Esercizio 2. Trovare la frontiera dell'insieme

$$D = B_1(0,0) \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 1\}$$

$$\partial D =$$

Esercizio 3. Sviluppare fino al secondo ordine in $(0,0)$ la funzione

$$\frac{e^x \sqrt{1+2y}}{\cos(2x)} =$$

Esercizio 4. Siano $\gamma(t) = (\cos(2t)e^t - 1, \sin(2t)\cos(5t))$ e $F(x,y) = \frac{x-2y}{1+x-y}$.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. Calcolare, al variare del parametro $A \in \mathbb{R}$, la matrice hessiana H della funzione $F(x, y) = \frac{(1 + Axy)e^{2x}}{1 - y^2}$ nel punto $(0, 0)$.

$H =$

Per quali valori di A la matrice H è definita positiva?

Esercizio 6. Sia $\alpha = (y^2 + 2xy + x) dx + (xy + x^2) dy$ e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 a tratti che parametrizza il bordo del dominio $\Omega = \{(x, y) : 0 < y < x \leq 1\}$ in senso antiorario.

Calcolare $\int_{\gamma} \alpha =$

Esercizio 7. Consideriamo il campo $F(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2 + y^2 + 5}, \frac{3x - y}{x^2 + y^2 + 6} \right)$.

Dato l'insieme $\Omega = B_{\sqrt{3}}(0, 0)$, calcolare $\iint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y) dx dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = xy^2 - x^2 + 2xy.$$

Trovare i punti critici di F in \mathbb{R}^2 . Studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. Mostrare che l'estremo superiore $\sup_D F$ della funzione

$$F(x, y, z) = x,$$

sull'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - y)^2 + (2x - z)^2 + (y - 2z)^2 \leq 3\}.$$

è raggiunto sul bordo ∂D e trovarlo.

Esercizio 10. Data la funzione

$$F(x, y) = \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + 4y^2},$$

trovare $\limsup_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y)$.

Esercizio 11. Consideriamo la funzione

$$F(0, 0) = 0 \quad e \quad F(x, y) = \frac{x^{n+7}y^{n+3}}{(x^2 + y^2 + \sin(xy^2))^{2n}} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0).$$

Per quali valori del parametro intero $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0, 0)$?
