
Prova scritta – 13/2/2024

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. Consideriamo gli insiemi

$$(A) \Omega_A = (B_2(0,0) \setminus B_1(0,0)) \cap B_2(1,0); \quad (D) \Omega_D = (\overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(0,0)) \cap \overline{B}_2(1,0);$$

$$(B) \Omega_B = (B_2(0,0) \setminus B_1(0,0)) \cup B_2(1,0); \quad (E) \Omega_E = (\overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(0,0)) \cup \overline{B}_2(1,0);$$

$$(C) \Omega_C = (B_2(0,0) \setminus B_1(0,0)) \setminus B_2(1,0); \quad (F) \Omega_F = (\overline{B}_2(0,0) \setminus B_1(0,0)) \setminus \overline{B}_2(1,0).$$

Gli insiemi seguenti sono compatti:

Gli insiemi seguenti sono aperti:

Gli insiemi seguenti non sono né aperti, né compatti:

Esercizio 2. Trovare la frontiera dell'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 + 2x)^2 < x + y < 1 - x \right\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. Sviluppare fino al secondo ordine in $(0,0)$ la funzione

$$\frac{e^{x+y}(1 - \sin(x+y))}{\sqrt{\cos x}} =$$

Esercizio 4. Siano $\gamma(t) = \left(1 - \frac{\cos(2t)}{1 + 2 \sin t}, 1 - \frac{e^{2t}}{1 + \sin(3t)}\right)$ e $F(x, y) = (1 + x)e^{3x-y}$.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. Calcolare, al variare del parametro $A \in \mathbb{R}$, la matrice hessiana H della funzione $F(x, y) = \frac{(1 - Ax + x^2)e^{x-y}}{\cos(x-y)}$ nel punto $(0, 0)$.

$H =$

Per quali valori di A la matrice H è definita positiva?

Esercizio 6. Sia $\alpha = (y^3 + 2xy) dx + (x^2 - x^3) dy$ e sia γ la curva semplice chiusa e C^1 che parametrizza il bordo del dominio $\Omega = B_2(0, 0) \cap \{(x, y) : xy > 0\}$ in senso antiorario.

Calcolare $\int_{\gamma} \alpha =$

Esercizio 7. Consideriamo il campo $F(x, y) = (3xy^2 + 3x^3, yx^2 + y^3)$.

Dato l'insieme $\Omega = B_1(0, 0) \cap \{(x, y) : x \geq 0\}$, calcolare $\iint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y) dx dy =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = y^3 - x^2y^2 - xy^4.$$

Trovare i punti critici di F in \mathbb{R}^2 . Studiando la matrice hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. Trovare l'estremo superiore della funzione

$$F(x, y, z) = x - y,$$

sull'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 \leq 2\}.$$

Esercizio 10. Data la funzione

$$F(x, y) = \frac{xy\sqrt{x^2 + y^2}}{3x^2 + y^2(x^2 + y^2) + x^4},$$

calcolare $\limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$.

Esercizio 11. Consideriamo la funzione

$$F(0, 0) = 0 \quad e \quad F(x, y) = \frac{(\sin x)^{n+4} y^{n+3}}{(x^2 + y^2)^{2n}} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0).$$

Per quali valori del parametro intero $n \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0, 0)$?
