Prova scritta – 18/7/2023

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

(A) $\Omega_A = \Big([0,2]\times\{0\}\Big) \setminus \overline{B}_1(1,0)$; (D) $\Omega_D = \Big([0,2]\times\{0\}\Big) \cap B_1(1,0)$;

(B) $\Omega_B = \Big([0,2]\times\{0\}\Big) \setminus B_1(1,0)$; (E) $\Omega_E = \Big([0,2]\times\{0\}\Big) \cup \overline{B}_1(1,0)$;

(C) $\Omega_C = \Big([0,2]\times\{0\}\Big) \cap \overline{B}_1(1,0)$; (F) $\Omega_F = \Big([0,2]\times\{0\}\Big) \cup B_1(1,0)$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti :**

Gli insiemi seguenti sono **aperti :**

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti :**

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le y \le 1 - x^3 \le 1 \;\Big\}$$

$\partial D =$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$$\frac{e^{x-y}}{\sqrt{1+x^2}} =$$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\sin(5t)\cos(2t)\,,\; \cos(3t)\ln(1+2t)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{e^{x-y}}{2y+\cos x}$.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro* $A \in \mathbb{R}$, *la matrice hessiana* H *della funzione* $F(x,y) = \dfrac{1 - \sin(Ax + 2x^2) + \sin(Ay)}{1 + x - y^2}$ *nel punto* $(0,0)$.

$H =$ *Per quali valori di* A *la matrice* H *è* **indefinita**?

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (x + y^2)\,dx + (y + xy)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq y \leq 1\Big\}$ *in senso antiorario.*
Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \alpha =$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\dfrac{y^3 + xy^2}{1 + x^2 + y^2}\,,\, \dfrac{x^3 + y^3}{2 + x^2 + y^2}\right)$.
Sulla palla B *di centro* $(0,0)$ *e raggio* 1, *calcolare* $\displaystyle\iint_B \mathrm{div} F(x,y)\,dx\,dy =$

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(x,y) = 0 \quad \textit{se} \quad (x,y) = 0 \qquad \textit{e} \qquad F(x,y) = \frac{(2x - 3y)^{n+7}\sin(xy)}{(x^2 + y^2)^n} \quad \textit{se} \quad (x,y) \neq 0\ .$$

Per quali valori di $n \geq 1$ *la funzione* F *è differenziabile in* $(0,0)$?

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 9. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = x^2 - xy + y^3.$$

Trovare i punti critici di F *in* $\mathbb{R}^2$, *studiare la matrice hessiana e dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.*

Esercizio 10. *Dati la funzione*

$$F(x,y,z) = x^2 + yz - y + z\,,$$

e l'insieme

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 5\Big\}\,,$$

mostrare che l'estremo superiore $\sup\limits_D F$ *è raggiunto e calcolarlo.*

Esercizio 11. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{xy\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + (x^2 + y^2)y^2} \quad ,$$

calcolare $\limsup\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.
