

---

**Prova scritta – 27/6/2023**

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

---

Nome:

---

Cognome:

---

**Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)**

**Esercizio 1.** Consideriamo gli insiemi

$$(A) \Omega_A = \overline{B}_1(0,0) \setminus B_1(1,0) ; \quad (D) \Omega_D = B_1(0,0) \setminus B_1(1,0) ;$$

$$(B) \Omega_B = \overline{B}_1(0,0) \cap B_1(1,0) ; \quad (E) \Omega_E = B_1(0,0) \setminus \overline{B}_1(1,0) ;$$

$$(C) \Omega_C = \overline{B}_1(0,0) \setminus \partial B_1(1,0) ; \quad (F) \Omega_F = \overline{B}_1(0,0) \cap \partial B_1(1,0) .$$

---

*Gli insiemi seguenti sono **compatti**:*

*Gli insiemi seguenti sono **aperti**:*

*Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti**:*

---

**Esercizio 2.** Trovare la frontiera dell'insieme

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x \leq 2 \right\}$$

$\partial D =$

---

**Esercizio 3.** Sviluppare fino al secondo ordine in  $(0,0)$  la funzione

$$\frac{\sqrt{1+xy}}{e^{\sin y}} =$$

---

**Esercizio 4.** Siano  $\gamma(t) = \left( e^{3t} \cos(2t) - 1, e^{5t} \sin(2t) \right)$  e  $F(x, y) = \frac{e^{3x-y} - e^{x+y}}{\cos(x+y)}$ .

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

---

**Esercizio 5.** Calcolare, al variare del parametro  $A \in \mathbb{R}$ , la matrice hessiana  $H$  della funzione  $F(x, y) = \frac{e^{Ay} + \sin x}{1 - Ax}$  nel punto  $(0, 0)$ .

$H =$

Per quali valori di  $A$  la matrice  $H$  è indefinita?

---

**Esercizio 6.** Sia  $\alpha = (x + y)^2 dx + (x + y) dy$  e sia  $\gamma$  la curva semplice chiusa e  $C^1$  che parametrizza il bordo del dominio  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$  in senso antiorario.

Calcolare l'integrale  $\int_{\gamma} \alpha =$

---

**Esercizio 7.** Consideriamo il campo  $F(x, y) = \left( \frac{x^3 + 3xy^2}{2 + x^2 + y^2}, \frac{5x}{4 + x^2 + y^2} \right)$ .

Sulla palla  $B$  di centro  $(0, 0)$  e raggio 2, calcolare  $\iint_B \operatorname{div} F(x, y) dx dy =$

---

**Esercizio 8.** Consideriamo la funzione  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$F(x, y) = 0 \quad \text{se} \quad (x, y) = 0 \quad \text{e} \quad F(x, y) = \frac{(x + y)^{n+5} \sin(x^{n+4})}{(x^2 + y^2)^{2n}} \quad \text{se} \quad (x, y) \neq 0 .$$

Per quali valori di  $n \geq 1$  la funzione  $F$  è differenziabile in  $(0, 0)$ ?

---

## Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

---

**Esercizio 9.** Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy.$$

Trovare i punti critici di  $F$  in  $\mathbb{R}^2$ , studiare la matrice hessiana e dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

---

**Esercizio 10.** Dati la funzione

$$F(x, y, z) = x + 2y - z,$$

e l'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - x - y)^2 \leq 2\},$$

mostrare che l'estremo superiore  $\sup_D F$  è raggiunto e calcolarlo.

---

**Esercizio 11.** Data la funzione

$$F(x, y) = \frac{x \sin(xy)}{x^4 + y^2},$$

calcolare  $\limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$ .

---