Prova scritta – 6/6/2023

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. *Consideriamo gli insiemi*

(*A*) $\Omega_A = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big) \setminus B_1(1,1)$;

(*B*) $\Omega_B = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big) \cap B_1(1,1)$;

(*C*) $\Omega_C = \Big((-1,1)\times(-1,1)\Big) \cup B_1(1,1)$;

(*D*) $\Omega_D = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big) \setminus B_1(1,1)$;

(*E*) $\Omega_E = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big) \cup B_1(1,1)$;

(*F*) $\Omega_F = \Big([-1,1]\times[-1,1]\Big) \cap B_1(1,1)$.

Gli insiemi seguenti sono **compatti :** D

Gli insiemi seguenti sono **aperti :** B, C

Gli insiemi seguenti non sono **né aperti, né compatti :** A, E, F

Esercizio 2. *Trovare la frontiera dell'insieme*

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+2 < y < 3x\Big\}$$

$\partial D =$ $\{(x, x^2+2) : x \in [1,2]\} \cup \{(x, 3x) : x \in [1,2]\}$

Esercizio 3. *Sviluppare fino al secondo ordine in* $(0,0)$ *la funzione*

$\dfrac{e^{x+xy}}{\cos y} =$ $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy + o(x^2+y^2)$

Esercizio 4. *Siano* $\gamma(t) = \Big(\sqrt{1+\sin(3t)}-1\,,\ \ln\big(1-\sin(t+t^2)\big)\Big)$ *e* $F(x,y) = \dfrac{2x-y}{\sqrt{1+xy}}$.

$\dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\gamma(t)) =$ $\gamma'(0)\cdot\nabla F(\gamma(0)) = (3/2, -1)\cdot(2,-1) = 4$

Esercizio 5. *Calcolare, al variare del parametro $A \in \mathbb{R}$, la matrice hessiana H della funzione* $F(x,y) = \dfrac{e^{xy} + \cos(Ax)}{\sqrt{1+Ay}}$ *nel punto* $(0,0)$.

$$H = \begin{pmatrix} -A^2 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2}A^2 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di A la matrice H è **indefinita***?* $\forall A \in \mathbb{R}$

Esercizio 6. *Sia* $\alpha = (x^3 + 2y)\,dx + (y^3 + x)\,dy$ *e sia* γ *la curva semplice chiusa e* C^1 *che parametrizza il bordo del dominio* $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x^2 - x \le y \le x\right\}$ *in senso antiorario.* *Calcolare,* ~~*in funzione del raggio* $R > 0$~~*, l'integrale* $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \int_\Omega d\alpha = -\int_1^2 dx \int_{x^2-x}^{x} dy = -\frac{2}{3}$

Esercizio 7. *Consideriamo il campo* $F(x,y) = \left(\dfrac{x^3 + y}{2 + 2\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y^3 + 2x}{2 + x^2 + y^2} \right)$.

Sulla palla $B = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \le 4\}$, *calcolare* $\displaystyle\iint_B \operatorname{div} F(x,y)\,dx\,dy = 4\pi.$

Esercizio 8. *Consideriamo la funzione* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definita come*

$$F(x,y) = 0 \quad se \quad (x,y) = 0 \qquad e \qquad F(x,y) = \frac{\sin(x^{n+3})\sin(y^{n+4})}{(x^2+y^2)^{2n}} \quad se \quad (x,y) \ne 0\ .$$

Per quali valori di $n \ge 1$ la funzione F è differenziabile in $(0,0)$? $n = 1, 2.$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 9. *Consideriamo la funzione*

$$F(x,y) = 6xy - x^3 - 3y^2.$$

Trovare i punti critici di F in $\mathbb{R}^2$, studiare la matrice hessiana e dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 10. *Dati la funzione*

$$F(x,y,z) = x + xy - z\,,$$

e l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + (z-x)^2 \le 3\right\},$$

mostrare che l'estremo superiore $\sup_D F$ *è raggiunto e calcolarlo.*

Esercizio 11. *Data la funzione*

$$F(x,y) = \frac{y(x^2+y^2)^5}{(x^2+y^2)^n + y^4}\quad ,$$

calcolare, in funzione del parametro $n \ge 1$, $\displaystyle\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Es. 9: $F(x,y) = 6xy - x^3 - 3y^2$

$$\begin{cases} \partial_x F(x,y) = 6y - 3x^2 \\ \partial_y F(x,y) = 6x - 6y \end{cases}$$

I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \partial_x F(x,y) = 0 \\ \partial_y F(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y - x^2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ x = y \end{cases}$$

Quindi, i punti critici sono $(0,0)$ e $(2,2)$.

Calcoliamo la matrice hessiana:

$$D^2F(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}F & \partial_{xy}F \\ \partial_{yx}F & \partial_{yy}F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

① $D^2F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$

$\det(D^2F(0,0)) = -36$. Quindi, la matrice $D^2F(0,0)$ è indefinita e, di conseguenza, il punto $(0,0)$ è un punto di sella.

② $D^2F(2,2) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$.

$\det(D^2F(2,2)) > 0$ e $\operatorname{tr}(D^2F(2,2)) < 0$

Quindi, la matrice $D^2F(2,2)$ è definita negativa ed il punto critico $(2,1)$ è un punto di massimo relativo.

<u>Es. 10</u>: $$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+(z-x)^2 \le 3\right\},$$

- <u>L'insieme D è un chiuso</u>: Infatti, se $(x_n, y_n, z_n) \in D$ è una successione di punti in D che converge ad un punto (x_0, y_0, z_0), allora:
$$3 \ge \lim_{n\to+\infty} \left(x_n^2+y_n^2+(x_n-z_n)^2\right) = x_0^2+y_0^2+(x_0-z_0)^2$$
Quindi, anche $(x_0,y_0,z_0) \in D$, ovvero D è un insieme chiuso.

- <u>L'insieme D è limitato</u>: Infatti, dato un punto $(x,y,z) \in D$, abbiamo che
$$x^2+y^2+(z-x)^2 \le 3.$$
Di conseguenza, abbiamo le disuguaglianze:
$$\begin{cases} x^2 \le 3 \\ y^2 \le 3 \\ (x-z)^2 \le 3. \end{cases}$$
Ora, siccome $\quad z^2 = \left((z-x)+x\right)^2 \le 2(z-x)^2+2x^2,$

abbiamo che $\quad z^2 \le 2.3+2.3 = 12.$

Quindi $\quad x^2+y^2+z^2 \le 3+3+12 = 18.$

In particolare, l'insieme D è contenuto nella palla chiusa di centro $(0,0,0)$ e raggio 18.

- <u>Esistenza di minimo di F su D:</u> La funzione F è una funzione continua (su $\mathbb{R}^3$). Inoltre, l'insieme D è un chiuso e limitato (e quindi compatto) in $\mathbb{R}^3$. Quindi, l'estremo superiore $\sup_D F$ è raggiunto in D.

- Osserviamo che siccome

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1+y \\ x \\ -1 \end{pmatrix}.$$

la funzione F non ha punti critici su $\mathbb{R}^3$ e nemmeno nella parte interna di D. Quindi, l'estremo superiore $\sup_D F$ è raggiunto sul bordo ∂D.

- Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, abbiamo che i punti $(x,y,z) \in \partial D$ che realizzano il massimo di F su ∂D sono fra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1+y = \lambda(2x + 2(x-z)) & (1) \\ x = \lambda \cdot 2y & (2) \\ -1 = \lambda \cdot 2(z-x) & (3) \\ x^2+y^2+(z-x)^2 = 3 & (4) \end{cases}$$

Osserviamo che siccome $-1 = \lambda \cdot 2(z-x)$, si ha che $\lambda \neq 0$.

Da (1) e (3), abbiamo:

$$\begin{aligned} 1+y &= 2\lambda x + 2\lambda(x-z) \\ &= 2\lambda x - 2\lambda(z-x) \\ &= 2\lambda x - (-1) = 2\lambda x + 1 \implies y = 2\lambda x. \end{aligned}$$

Quindi: $\begin{cases} x = 2\lambda y \\ y = 2\lambda x \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad x = 2\lambda y = 2\lambda(2\lambda x) = (4\lambda)^2 x.$$

Consideriamo due casi:

I) $x = 0$. Quindi, anche $y = 0$.
Usando (4), otteniamo che $z^2 = 3$ e quindi le soluzioni sono:
$$(0, 0, \sqrt{3}) \text{ e } (0, 0, -\sqrt{3}).$$

II) $x \neq 0$. Quindi $(2\lambda)^2 = 1$ e $2\lambda = \pm 1$.
Consideriamo altri due casi:

(a) $2\lambda = 1$. Quindi:

$$\begin{cases} x = y \\ x - z = 1 \\ 2x^2 + (x-z)^2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x - z = 1 \\ 2x^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$$

(b) $2\lambda = -1$. Quindi abbiamo

$$\begin{cases} x = -y \\ z - x = 1 \\ 2x^2 + (x-z)^2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z - x = 1 \\ 2x^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$F(x,y,z) = x + xy - z$

I candidati sono:

$F(0,0,\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$

$F(0,0,-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

$F(1,1,0) = 2$

$F(-1,-1,-2) = 2$

$F(1,-1,2) = -2$

$F(-1,1,0) = -2$.

Quindi: $\sup_D F = 2$ ed è raggiunto nei punti $(1,1,0)$ e $(-1,-1,-2)$.

Es. 11:

$$F(x,y) = \frac{y(x^2+y^2)^5}{(x^2+y^2)^n + y^4},$$

In coordinate polari

$$x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta,$$

abbiamo:

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^{11}\sin\theta}{r^{2n} + r^4\sin^4\theta}.$$

Per calcolare

$$\sup_\theta F(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

ad un raggio $r > 0$ fissato, cerchiamo

i punti critici θ, soluzioni di

$$\partial_\theta \left[F(r\cos\theta, r\sin\theta) \right] = 0.$$

$$\partial_\theta \left[F(r\cos\theta, r\sin\theta) \right] = 0$$

$$\iff \partial_\theta \left[\frac{\sin\theta}{r^{2n} + r^4 \sin^4\theta} \right] = 0$$

$$\iff \cos\theta \left(r^{2n} + r^4 \sin^4\theta \right) - \sin\theta \cdot r^4 \, 4\cos\theta \sin^3\theta = 0$$

$$\iff \cos\theta \left(r^{2n} - 3r^4 \sin^4\theta \right) = 0$$

$$\iff \cos\theta \left(\frac{r^{n-2}}{\sqrt{3}} - \sin^2\theta \right)\left(\frac{r^{n-2}}{\sqrt{3}} + \sin^2\theta \right) = 0$$

$$\iff \cos\theta \left(\frac{r^{n-2}}{\sqrt{3}} - \sin^2\theta \right) = 0$$

Se $\cos\theta = 0$, allora $\sin\theta = \pm 1$.

Allora $F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{\pm r^{11}}{r^{2n} + r^4}$.

Se $n = 1$, allora per r abbastanza piccolo non esistono soluzioni di $\dfrac{r^{-1}}{\sqrt{3}} - \sin^2\theta = 0$

Quindi, per $n = 1$,

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^{11}}{r^2 + r^4} = 0.$$

Se $n = 2$, allora le soluzioni di $\partial_\theta \left[F(r\cos\theta, r\sin\theta) \right] = 0$ sono: $\sin\theta = \pm 1$ oppure $\sin\theta = \pm \dfrac{1}{3^{1/4}}$.

Quindi: $F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{\pm r^{11}}{r^4 + r^4}$

oppure $\quad F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{\pm r^{11}\cdot\frac{1}{3^{1/4}}}{r^4 + r^4\cdot\frac{1}{3}}$,

e di conseguenza

$$\lim_{r\to 0}\left\{\sup_{\theta} F(r\cos\theta, r\sin\theta)\right\} = 0.$$

Se $n \geq 3$, allora le soluzioni sono:

$$\sin\theta = \pm 1 \quad \text{oppure} \quad \sin\theta = \pm\frac{1}{3^{1/4}}\, r^{n/2-1}$$

Quindi

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\pm r^{11}}{r^{2n} + r^4}$$

oppure

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\pm\frac{1}{3^{1/4}}\, r^{n/2-1}\cdot r^{11}}{r^{2n} + r^4\left(\frac{1}{3^{1/4}} r^{n/2-1}\right)^4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3^{1/4}}\,\frac{r^{n/2+10}}{r^{2n}}.$$

Se $\frac{n}{2} + 10 < 2n$ (equivalentemente $\frac{20}{3} < n$),

allora

$$\lim_{r\to+\infty}\left\{\sup_{\theta} F(r\cos\theta, r\sin\theta)\right\} = +\infty.$$

Se $\frac{n}{2} + 10 > 2n$ ($\Longleftrightarrow \frac{20}{3} > n$),

allora

$$\lim_{r\to+\infty}\left\{\sup_{\theta} F(r\cos\theta, r\sin\theta)\right\} = 0.$$

In conclusione:

$$\limsup_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 6; \\ +\infty, & \text{se } n \geq 7. \end{cases}$$