

---

## Flusso di un campo attraverso il bordo di un dominio normale

---

### DOMINI NORMALI SEMPLICI DI CLASSE $C^1$

Sia  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervallo chiuso e limitato e siano

$$u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

due funzioni di classe  $C^1$  su  $[a, b]$  tali che:

$$u(x) < v(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in (a, b).$$

Consideriamo il dominio normale semplice

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b], u(x) \leq y \leq v(x)\}.$$

Per ogni punto di frontiera  $(x, y) \in \partial D$ , definiamo

**il vettore normale uscente  $\nu_D(x, y)$**

come segue:

(1) se  $(x, y) \in \{(x, u(x)) : x \in (a, b)\}$ , allora

$$\nu_D(x, y) = \nu_D(x, u(x)) = \frac{(u'(x), -1)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}.$$

(2) se  $(x, y) \in \{(x, v(x)) : x \in (a, b)\}$ , allora

$$\nu_D(x, y) = \nu_D(x, v(x)) = \frac{(-v'(x), 1)}{\sqrt{1 + (v'(x))^2}}.$$

(3) se  $(x, y) \in \{(a, y) : y \in [u(a), v(a)]\}$ , allora

$$\nu_D(x, y) = \nu_D(a, y) = (-1, 0).$$

(4) se  $(x, y) \in \{(b, y) : y \in [u(b), v(b)]\}$ , allora

$$\nu_D(x, y) = \nu_D(b, y) = (1, 0).$$


---

### INTEGRAZIONE DI FUNZIONI SUL BORDO DI UN DOMINIO NORMALE

Sia  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervallo chiuso e limitato e siano

$$u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

due funzioni di classe  $C^1$  su  $[a, b]$  tali che:

$$u(x) < v(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in (a, b).$$

Consideriamo il dominio normale semplice

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b], u(x) \leq y \leq v(x)\}.$$

Sia  $\gamma$  la curva semplice chiusa che parametrizza il bordo  $\partial D$  in senso antiorario.

Data una funzione continua

$$F : \partial D \rightarrow \mathbb{R},$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F &= \int_a^b F(x, u(x)) \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx \\ &\quad + \int_{u(b)}^{v(b)} F(b, y) dy \\ &\quad + \int_a^b F(x, v(x)) \sqrt{1 + (v'(x))^2} dx \\ &\quad + \int_{u(a)}^{v(a)} F(a, y) dy. \end{aligned}$$

### FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE ATTRAVERSO IL BORDO DI UN DOMINIO NORMALE

Sia  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervallo chiuso e limitato e siano

$$u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

due funzioni di classe  $C^1$  su  $[a, b]$  tali che:

$$u(x) < v(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in (a, b).$$

Consideriamo il dominio normale semplice

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b], u(x) \leq y \leq v(x)\}.$$

Sia  $\gamma$  la curva semplice chiusa che parametrizza il bordo  $\partial D$  in senso antiorario.

Dato un campo continuo

$$\Phi = (F, G) : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \Phi \cdot \nu_D &= \int_a^b \left( F(x, u(x)), G(x, u(x)) \right) \cdot \frac{(u'(x), -1)}{\sqrt{1 + (u'(x))^2}} \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx \\ &\quad + \int_{u(b)}^{v(b)} \left( F(b, y), G(b, y) \right) \cdot (1, 0) dy \\ &\quad + \int_a^b \left( F(x, v(x)), G(x, v(x)) \right) \cdot \frac{(-v'(x), 1)}{\sqrt{1 + (v'(x))^2}} \sqrt{1 + (v'(x))^2} dx \\ &\quad + \int_{u(a)}^{v(a)} \left( F(a, y), G(a, y) \right) \cdot (-1, 0) dy \\ &= \int_a^b \left( F(x, u(x))u'(x) - G(x, u(x)) \right) dx \\ &\quad + \int_{u(b)}^{v(b)} F(b, y) dy \\ &\quad + \int_a^b \left( -F(x, v(x))v'(x) + G(x, v(x)) \right) dx \\ &\quad - \int_{u(a)}^{v(a)} F(a, y) dy. \end{aligned}$$