
Prova scritta – Gennaio 2022

Non è consentito l'uso di telefoni cellulari, tablet, smartwatch (né di altri dispositivi connessi), né di calcolatrici, libri, dispense, appunti...

Nome:

Cognome:

Parte 1. (Domande a risposta aperta. Sarà valutata solo la risposta finale.)

Esercizio 1. Con B_R indichiamo la palla di raggio $R > 0$ e centro $(0,0)$ in \mathbb{R}^2

$$\overline{B}_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Consideriamo gli insiemi

- (A) $\Omega_A = \{[0, 1] \times [0, 1]\} \setminus \overline{B}_1$; (B) $\Omega_B = \{[0, 1] \times [0, 1]\} \cap \overline{B}_1$;
 (C) $\Omega_C = \{[0, 1] \times [0, 1]\} \cup \overline{B}_1$; (D) $\Omega_D = \overline{B}_1 \setminus \{[0, 1] \times [0, 1]\}$;
 (E) $\Omega_E = \{(0, 1] \times (0, 1]\} \cup \overline{B}_1$; (F) $\Omega_F = \overline{B}_1 \cap \{(0, 1] \times (0, 1]\}$.
-

Gli insiemi seguenti sono **chiusi** :

Esercizio 2. Trovare la frontiera dell'insieme

$$D = B_1 \cap \{(0, y) : -2 \leq y \leq 2\} \setminus \{(x, 0) : -2 \leq x \leq 2\}$$

$$\partial D =$$

Esercizio 3. Sviluppare fino al secondo ordine in zero la funzione $\frac{e^{x-xy}}{1-y}$.

$$\frac{e^{x-xy}}{1-y} =$$

Esercizio 4. Siano $\gamma(t) = (\sin(3t)e^{2t}, e^{4t} - \cos(2t))$ e $F(x, y) = (1-y)^2 + (1+x)^3$.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\gamma(t)) =$$

Esercizio 5. Calcolare la matrice hessiana H della funzione $F(x, y) = \frac{(x - 3y) \sin(2x - y)}{\cos(x + y)}$ in $(0, 0)$. Dire se H è definita positiva, semi-definita positiva, definita negativa, semi-definita negativa, indefinita.

$H =$

La matrice H è:

Esercizio 6. Calcolare l'integrale della funzione $F(x, y) = xy$ su $\Omega = B_1 \cap \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$.

$$\iint_{\Omega} F(x, y) dx dy =$$

Esercizio 7. Consideriamo la forma $\alpha = (x^3 e^{2x} - 2y) dx + (x^2 + 2y^3) dy$ e la curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Calcolare $\int_{\gamma} \alpha =$

Parte 2. Saranno valutate sia la risposta finale che lo svolgimento degli esercizi.

Esercizio 8. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = x^3 + 3xy - y^3.$$

Trovare (se esistono!) i punti critici di F in \mathbb{R}^2 e, studiando la matrice Hessiana, dire se si tratta di punti di massimo relativo, di minimo relativo oppure di punti di sella.

Esercizio 9. Trovare i massimi ed i minimi della funzione

$$F(x, y, z) = x^2 + 4y - 2z,$$

sull'insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 10. Consideriamo la funzione

$$F(x, y) = \frac{xy\sqrt{x^2 + y^2}}{y^2 + (x^2 + y^2)^2}.$$

Calcolare $\limsup_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$ e $\liminf_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$ e dire se esiste il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$.

Esercizio 11. Consideriamo la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$F(0, 0) = 0 \quad e \quad F(x, y) = \frac{x|y|^a}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x, y) \neq (0, 0),$$

dove $a \geq 1$ è un parametro reale.

- (1) Per quali valori del parametro $a \geq 1$ la funzione è derivabile in $(0, 0)$.
 - (2) Per quali valori del parametro $a \geq 1$ la funzione F è continua in $(0, 0)$.
 - (3) Per quali valori del parametro $a \geq 1$ la funzione F è differenziabile in $(0, 0)$.
-