

## Elementi di topologia in $\mathbb{R}^n$

### LO SPAZIO EUCLIDEO $\mathbb{R}^n$

Useremo la notazione seguente :

- $\mathbb{R}^n$  è lo spazio euclideo di dimensione  $n$ :

$$\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) : x_k \in \mathbb{R} \text{ per ogni } k = 1, \dots, n \right\}.$$

- $\mathbb{Q}^n$  è l'insieme dei punti con coordinate razionali in  $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{Q}^n = \left\{ (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) : q_k \in \mathbb{Q} \text{ per ogni } k = 1, \dots, n \right\}.$$

- Se  $x$  e  $y$  sono due punti di  $\mathbb{R}^n$  con coordinate

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

allora  $X + Y$  e  $X - Y$  sono i vettori con coordinate

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad \text{e} \quad X - Y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n).$$

- Se  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , allora definiamo la norma Euclidea  $|X|$  come

$$|X| := \left( x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \right)^{1/2}.$$

- La funzione  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definita come

$$d(X, Y) = |X - Y|,$$

è una distanza su  $\mathbb{R}^n$ , ovvero valgono le proprietà seguenti:

- (1) Per ogni  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ , si ha che  $|X - Y| \geq 0$ . Inoltre,  $|X - Y| = 0$  se e solo se  $X = Y$ .
- (2) Per ogni  $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ , vale la disuguaglianza triangolare

$$|X - Y| + |Y - Z| \geq |X - Z|.$$

- Per ogni  $X \in \mathbb{R}^n$  ed ogni  $r > 0$ , indichiamo con  $B_r(X)$  la palla centrata in  $X$  di raggio  $r$ .

$$B_r(X) := \left\{ Y \in \mathbb{R}^n : |X - Y| < r \right\}.$$

- Per ogni  $X \in \mathbb{R}^n$  ed ogni  $r > 0$ , indichiamo con  $\overline{B}_r(X)$  la palla chiusa centrata in  $X$  di raggio  $r$ .

$$\overline{B}_r(X) := \left\{ Y \in \mathbb{R}^n : |X - Y| \leq r \right\}.$$

Quando  $X = 0$  scriveremo semplicemente  $B_r$  e  $\overline{B}_r$  al posto di  $B_r(0)$  e  $\overline{B}_r(0)$ .

**Le due nozioni di prodotto in  $\mathbb{R}^n$ .**

Per ogni  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e per ogni numero reale  $t \in \mathbb{R}$ , definiamo il prodotto  $tX \in \mathbb{R}^n$  del vettore  $X$  con il numero reale  $t$  come

$$tX = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n).$$

Inoltre, per ogni

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

definiamo il prodotto scalare tra  $x$  e  $y$  come

$$X \cdot Y := \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

**Proposizione 1** (Proprietà del prodotto scalare).

(i) per ogni  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$X \cdot Y = Y \cdot X;$$

(ii) per ogni  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $t \in \mathbb{R}$  si ha che

$$(tX) \cdot Y = X \cdot (tY) = t(X \cdot Y);$$

(iii) per ogni  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z.$$

(iv) per ogni  $X \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$X \cdot X = |X|^2.$$

(v) per ogni  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$|X + Y|^2 = |X|^2 + 2X \cdot Y + |Y|^2.$$

**La disuguaglianza di Cauchy-Schwartz**

**Teorema 2.** Siano

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

due punti di  $\mathbb{R}^n$ . Allora vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$|X||Y| \geq |X \cdot Y|.$$

dove  $X \cdot Y$  è il prodotto scalare tra i vettori  $X$  e  $Y$ .

*Dimostrazione:* È sufficiente considerare il caso  $X \neq 0$  e  $Y \neq 0$ . Considerare la funzione

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = |X + tY|^2.$$

Trovare il punti di minimo della funzione  $f$  su  $\mathbb{R}$ . Concludere.

## Dimostrazione della disuguaglianza triangolare

**Teorema 3.** *Siano*

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad e \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

due punti di  $\mathbb{R}^n$ . Allora vale la disuguaglianza triangolare

$$|X| + |Y| \geq |X + Y|.$$

*Dimostrazione:* Sviluppare  $|X + Y|^2$ . Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, mostrare che  $|X + Y|^2 \leq (|X| + |Y|)^2$ .

---

## SUCCESSIONI CONVERGENTI E LIMITI DI SUCCESSIONI IN $\mathbb{R}^n$

**Definizione 4.** *Diciamo che la successione  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $X_\infty \in \mathbb{R}^n$ , se*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |X_k - X_\infty| = 0,$$

ovvero se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che

$$|X_k - X_\infty| < \varepsilon \quad \text{per ogni } k \geq N.$$

**Proposizione 5.** *Sia  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una successione in  $\mathbb{R}^n$ . Se  $X_\infty, Y_\infty \in \mathbb{R}^n$  sono due vettori tali che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |X_k - X_\infty| = 0 \quad e \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |X_k - Y_\infty| = 0,$$

allora  $X_\infty = Y_\infty$ . In particolare, se una successione converge, allora il suo limite è unico.

*Dimostrazione.* Usando la disuguaglianza triangolare, mostrare che  $|X_\infty - Y_\infty| = 0$ . □

**Proposizione 6.** *Siano  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  e  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  due successioni in  $\mathbb{R}^n$  convergenti rispettivamente a  $X_\infty$  e  $Y_\infty \in \mathbb{R}^n$ . Allora la successione  $X_k + Y_k$  converge a  $X_\infty + Y_\infty$ .*

*Dimostrazione.* Usare la disuguaglianza triangolare. □

**Proposizione 7.** *Siano  $V \in \mathbb{R}^n$  un vettore fissato e  $X_k \in \mathbb{R}^n$  una successione che converge a  $X_\infty \in \mathbb{R}^n$ . Allora,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V \cdot X_k = V \cdot X_\infty.$$

*Dimostrazione.* Usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. □

**Proposizione 8.** *Se  $X_k \in \mathbb{R}^n$  è una successione che converge a  $X_\infty \in \mathbb{R}^n$ , allora*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |X_k| = |X_\infty|.$$

*Dimostrazione.* Usare la disuguaglianza triangolare. □

**Corollario 9.** *Se  $X_k \in \mathbb{R}^n$  è una successione convergente in  $\mathbb{R}^n$ , allora  $X_k$  è limitata.*

**Definizione 10.** *Diciamo che una successione  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$  è limitata se esiste una costante  $R > 0$  tale che*

$$|X_k| \leq R \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

**Proposizione 11.** *Sia  $X_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$  una successione di vettori in  $\mathbb{R}^n$  e sia  $X_\infty = (x_1^\infty, x_2^\infty, \dots, x_n^\infty) \in \mathbb{R}^n$  un vettore fissato. Allora, sono equivalenti:*

- (i)  $X_k$  converge a  $X_\infty$  in  $\mathbb{R}^n$ ;
- (ii) per ogni fissato  $j = 1, \dots, n$  la successione  $x_j^k$  converge (per  $k \rightarrow +\infty$ ) a  $x_j^\infty$ .

**Teorema 12** (Bolzano-Weierstrass). *Ogni successione limitata in  $\mathbb{R}^n$  ammette una sottosuccessione convergente.*

## SUCCESSIONI DI CAUCHY E COMPLETEZZA DI $\mathbb{R}^n$

**Definizione 13.** Diciamo che una successione  $X_k$  di vettori in  $\mathbb{R}^n$  è di Cauchy, se

per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N > 0$  tale che  $|X_i - X_j| < \varepsilon$  per ogni  $i, j \geq N$ .

**Teorema 14** (Completezza di  $\mathbb{R}^n$ ). Ogni successione di Cauchy in  $\mathbb{R}^n$  converge.

---

## FUNZIONI CONTINUE

**Definizione 15.** Siano  $\Omega$  un insieme di  $\mathbb{R}^n$  e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione data. Diciamo che la funzione  $F$  è continua nel punto  $X \in \Omega$ , se valgono le seguenti (equivalenti) proprietà:

- per ogni successione di vettori  $X_k \in \Omega$ , convergente a  $X$ , la successione  $F(X_k)$  converge a  $F(X)$  in  $\mathbb{R}^m$ ;
- per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

per ogni punti  $Y \in \Omega$  tale che  $|Y - X| < \delta$  si ha  $|F(Y) - F(X)| < \varepsilon$ .

**Definizione 16.** Diciamo che una funzione  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  è continua su  $\Omega$ , se lo è in ogni punto  $X \in \Omega$ .

---

*Le dimostrazioni delle seguenti proposizioni sono lasciate per esercizio*

**Proposizione 17.** Sia  $\Omega$  un insieme in  $\mathbb{R}^n$ . Se  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  sono due funzioni, entrambe continue in un dato punto  $X \in \Omega$ , allora anche le funzioni

$$F + G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \quad e \quad F \cdot G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

sono continue in  $X$ .

**Proposizione 18.** Sia  $\Omega$  un insieme in  $\mathbb{R}^n$ . Se  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una funzione continua in un dato punto  $X \in \Omega$ , allora anche la funzione

$$|F| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

è continua in  $X$ .

**Proposizione 19.** Siano  $\Omega$  un insieme in  $\mathbb{R}^n$  ed  $F = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  una funzione data. Sia  $X \in \Omega$  un punto dato. Allora, sono equivalenti:

- la funzione  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  è continua in  $X$ ;
  - per ogni  $j = 1, \dots, m$  la funzione  $f_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $X$ .
- 

## ESERCIZI

**Esercizio 20.** Dimostrare che l'insieme  $\mathbb{Q}^n$  è denso in  $\mathbb{R}^n$  ovvero per ogni  $X \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un punto con coordinate razionali  $q \in \mathbb{Q}^n$  tale che  $|X - q| < \varepsilon$ .

**Esercizio 21.** Siano  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  e  $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  due successioni in  $\mathbb{R}^n$  convergenti rispettivamente a  $X_\infty$  e  $Y_\infty$ . Mostrare che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_k \cdot Y_k = X_\infty \cdot Y_\infty.$$

**Esercizio 22.** Siano

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

un vettore in  $\mathbb{R}^n$  ed una matrice  $n \times m$  con coefficienti reali. Mostrare che

$$|AX| \leq \|A\|_2 |X|,$$

dove

$$\|A\|_2 := \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

**Esercizio 23.** Siano  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  due vettori in  $\mathbb{R}^n$  e sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matrice  $n \times n$  con coefficienti reali. Mostrare che

$$(y_1 \ \dots \ y_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq |X||Y| \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

**Esercizio 24.** Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

una matrice  $n \times m$  con coefficienti reali. Sia  $X_k$  una successione di vettori in  $\mathbb{R}^n$  che converge a  $X_\infty \in \mathbb{R}^n$ . Mostrare che la successione  $Y_k := AX_k$  converge a  $Y_\infty := AX_\infty$  in  $\mathbb{R}^m$ .

**Esercizio 25.** Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

una matrice  $n \times m$  con coefficienti reali. Supponiamo che esiste un vettore non-nullo  $X \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$|AX| = \|A\|_2 |X|.$$

Che cosa si può dire sul rango della matrice  $A$ ?

**Esercizio 26.** Siano  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni Riemann integrabili. Dimostrare che

$$\left| \int_0^1 f(x) g(x) dx \right| \leq \left( \int_0^1 f^2(x) dx \right)^{1/2} \left( \int_0^1 g^2(x) dx \right)^{1/2}$$

**Esercizio 27.** Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matrice  $n \times n$  con coefficienti reali, simmetrica<sup>1</sup> e semi-definita positiva<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Una matrice  $A$  è simmetrica se  $Y^t A X = X^t A Y$  per ogni coppia di vettori  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ .

<sup>2</sup>Una matrice  $A$  è semi-definita positiva se  $X^t A X \geq 0$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^n$ .

- (1) *Mostrare che se per un qualche vettore  $X \in \mathbb{R}^n$  vale  $X^t A X = 0$ , allora  $A X = 0$ . (Mostrare per esempio che  $Y^t A X = 0$  per ogni  $Y \in \mathbb{R}^n$ .)*
- (2) *Mostrare che vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|Y^t A X| \leq (X^t A X)^{1/2} (Y^t A Y)^{1/2} \quad \text{per ogni } X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

**Esercizio 28.** *Sia  $B_r$  la palla di raggio  $r$  e centro l'origine in  $\mathbb{R}^n$ . Trovare il più grande cubo*

$$Q_\ell = (-\ell, \ell)^n$$

*di lato  $\ell > 0$  (e centro l'origine) contenuto in  $B_r$ .*

**Esercizio 29.** *Siano  $X$  e  $Y$  due punti di  $\mathbb{R}^n$  e siano  $R > r > 0$  due costanti reali. Mostrare che*

$$\text{se } |X - Y| < R - r, \quad \text{allora } B_r(Y) \subset B_R(X).$$

**Esercizio 30.** *Siano  $X$  e  $Y$  due vettori di  $\mathbb{R}^n$ . Dimostrare che*

$$|X - Y|^2 + |X + Y|^2 = 2(|X|^2 + |Y|^2).$$