DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea in Matematica

Convergenza per p-mediane di variabili aleatorie

Tesi di Laurea Triennale

CANDIDATO:
Massimo Sorella

RELATORE:
Dott. **Dario Trevisan**

Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione

In questo lavoro di tesi ci siamo occupati di alcuni risultati riguardanti "stimatori" non lineari di variabili aleatorie, noti in letteratura come *"predictions" o "conditional p-means"*, che noi chiameremo *p-mediane.* Vedremo in particolare come alcuni risultati di convergenza molto noti per il caso lineare (p=2) si possono estendere a quello non lineare, con opportune modifiche delle tecniche dimostrative.

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, chiamiamo $L^p(\mathcal{A})$ lo spazio di Lebesgue delle funzioni $\mathcal{A}$-misurabili a valori reali su cui è definita una norma: $\|f\|_{L^p}$, dove $1 < p \leq \infty$. Denoteremo con $L^p(\mathcal{B})$, dove $\mathcal{B}$ è una sotto σ-algebra di $\mathcal{A}$, il sottospazio di $L^p(\mathcal{A})$ delle funzioni $\mathcal{B}$-misurabili. Sono noti due applicazioni di proiezione sullo spazio $L^p(\mathcal{B})$: una che è la speranza condizionale $\mathbf{E}_{\mathcal{B}}$, operatore lineare, l'altra è la p-mediana $\pi_{\mathcal{B}}$ che assegna ad ogni $f \in L^p(\mathcal{A})$ una funzione in $L^p(\mathcal{B})$ con la minima distanza da *f.* La p-mediana è generalmente non lineare, ma nel caso $p = 2$, coincide con la speranza condizionale $\mathbf{E}_{\mathcal{B}}$, e in questo caso speciale ($L^2(\mathcal{A})$ è uno spazio Hilbert) queste due applicazioni sono la proiezione ortogonale di f sul sottospazio $L^2(\mathcal{B})$. In questo articolo studieremo innanzitutto le proprietà di base dell'applicazione p-mediana e mostreremo (attraverso dei controesempi) che l'estensione a valori vettoriali non possiede proprietà "naturali".

Successivamente vedremo alcuni risultati più complessi riguardanti la convergenza quasi certa di $\pi_{\mathcal{B}_n}(f)$ a $\pi_{\mathcal{B}_\infty}(f)$, dove $\{\mathcal{B}_n\}_n$ è una successione monotona di σ-algebre convergente a $\mathcal{B}_\infty$ e $\pi_{\mathcal{B}_n}(f)$ è la p-mediana di f sullo spazio $L^p(\mathcal{B}_n)$. Inoltre studieremo una disuguaglianza massimale delle p-mediane di f.

Infine tratteremo separamente i casi particolari di $p = 2$ e $p = \infty$.

Il caso $p = 2$ è quello in cui la p-mediana soddisfa più proprietà degli altri casi. In questo caso faremo un collegamento con le martingale.

Nel caso $p = \infty$ la ∞-mediana non è unica, a differenza dei casi $1 < p < \infty$. Proveremo a vedere che in questo insieme di ∞-mediane relative a $f \in L^\infty(\mathcal{A})$ se ne può scegliere una su tutte, quella a cui le p-mediane ($p > 1$) convergono debolmente $*$.

Capitolo 1

Nozioni fondamentali

1.1 Proiezioni su sottospazi di L^p

In questa sezione daremo la Definizione di p-mediana e delle sue proprietà base che saranno utilizzate in seguito. Inoltre vedremo, con dei controesempi, che alcune delle proprietà più semplici non si preservano per funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ (invece che a valori in $\mathbb{R}$). Su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ lavoreremo sempre con la σ-algebra di Borel.

Fissiamo d'ora in avanti $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità, p un numero reale $1 < p < \infty$ e chiamiamo

$$L^p(\mathcal{A}) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ è } \mathcal{A}\text{−misurabile e } \int_\Omega |f|^p dP < \infty\}.$$

Se non specificato utilizzeremo la seguente notazione $\|\cdot\|_p$ per indicare la norma di $L^p(\mathcal{A})$.

Definizione 1.1. Sia $1 < p < \infty$ e S un sottospazio vettoriale chiuso di L^p, definiamo l'applicazione di proiezione $\pi_S : L^p \to S$ nel modo seguente:

- $\pi_S(f) \in S$ per ogni $f \in L^p$,
- $\|\pi_S(f) - f\|_p = \inf\{\|f - h\|_p : h \in S\}$.

Sia 1<p<∞, chiamiamo *proiezione* di $f \in L^p(\mathcal{A})$ in S l'unico elemento v $\in$ S (a meno di equivalenza) tale che valgano le due proprietà precedenti. Talvolta in questa sezione chiameremo più semplicemente π l'applicazione di proiezione, senza specificare il sottospazio S su cui proiettiamo.

Chiamiamo inoltre *applicazione di proiezione*, l'applicazione π.

Dobbiamo controllare che questa Definizione sia ben posta, cioè che per ogni $f \in L^p(\mathcal{A})$ esiste ed è unica $\pi(f)$, così π sarebbe effettivamente un'applicazione.

Osservazione 1.2. Nulla ci vieta di definirla anche per $p = 1$ e $p = \infty$, anche se la Proposizione successiva non vale per questi casi. Anticipiamo l'esistenza della *proiezione* per $p = \infty$ che dimostreremo nel Capitolo 3.

Proposizione 1.3 (Esistenza e unicità)**.** *Sia $1 < p < \infty$ e sia S un sottospazio vettoriale chiuso di $L^p(\mathcal{A})$, allora esiste ed è unica la proiezione di f in S.*

Enunciamo un Lemma preliminare che non dimostreremo, noto come *disuguaglianza di Clarkson*:

Lemma 1.4 ([Cla36])**.** *Su $L^p(\mathcal{A})$ valgono le seguenti disuguaglianze:*

1. *Se $2 \leq p < \infty$,*

$$\left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p \leq \frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2}.$$

2. *Se $1 < p < 2$,*

$$\left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^q + \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^q \leq \left(\frac{\|f\|_p^p + \|g\|_p^p}{2} \right)^{q/p},$$

dove $1/q + 1/p = 1$.

Dimostrazione della Proposizione 1.3. !) **Caso** $2 \leq p < \infty$:

supponiamo per assurdo che ci siano due proiezioni, che chiamiamo $\pi_1(f)$ e $\pi_2(f)$. Allora vale che $\|\pi_i(f) - f\|_p = \inf\{\|f-h\|_p : h \in S\}$, per $i = 1, 2$. Quindi si ha dalla disuguaglianza 1. del Lemma 1.4:

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\pi_1(f) + \pi_2(f)}{2} - f \right\|_p^p \\ &\leq \left\| \frac{\pi_1(f) + \pi_2(f)}{2} - f \right\|_p^p + \left\| \frac{(\pi_1(f) - f) - (\pi_2(f) - f)}{2} \right\|_p^p \\ &\leq \inf\{\|f-h\|_p^p : h \in S\}. \end{aligned}$$

Poiché S è un sottospazio vettoriale (in realtà basta che S sia convesso), si ha che $\frac{\pi_1(f) + \pi_2(f)}{2} \in$ S, quindi si deduce che:

$$\left\| \frac{(\pi_1(f) - f) - (\pi_2(f) - f)}{2} \right\|_p^p \leq 0,$$

quindi per la proprietà della norma $(\pi_1(f) - f) - (\pi_2(f) - f) = 0$ (a meno di equivalenza), che è la tesi.

Caso $1 < p < 2$: Supponiamo come prima che ci siano due proiezioni. Dalla disuguaglianza 2. del Lemma 1.4 si ha:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\pi_1(f)+\pi_2(f)}{2}-f\right\|_p^q+\left\|\frac{(\pi_1(f)-f)-(\pi_2(f)-f)}{2}\right\|_p^q\\
&\le\left(\frac{\|\pi_1(f)-f\|_p^p+\|\pi_2(f)-f\|_p^p}{2}\right)^{q/p}\\
&\le(\inf\{\|f-h\|_p^p : h\in S\})^{q/p}\\
&\le\left\|\frac{\pi_1(f)+\pi_2(f)}{2}-f\right\|_p^q.
\end{aligned}$$

Quindi si deduce che:

$$\left\|\frac{(\pi_1(f)-f)-(\pi_2(f)-f)}{2}\right\|_p^q\le 0,$$

da cui la tesi.

$\exists$) **Caso** $2\le p<\infty$:
Sia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che:

- $v_n\in S\ \forall n\in\mathbb{N}$,
- $\lim_{n\to\infty}\|v_n-f\|_p=\inf\{\|f-h\|_p : h\in S\}$.

Chiamiamo $l=\inf\{\|f-h\|_p : h\in S\}$ e mostriamo che la successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.
Dalla Definizione della succesione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si ha che:
Per ogni $\varepsilon\ge 0$ esiste $n_0\in\mathbb{N}$ tale che: $\|v_n-f\|_p\le l+\varepsilon$, per ogni $n\ge n_0$
Usando la disuguaglianza 1. del Lemma 1.4 abbiamo che:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{v_n-v_m}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{v_n+v_m}{2}-f\right\|_p^p\\
&=\left\|\frac{(v_n-f)-(v_m-f)}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{(v_n-f)+(v_m-f)}{2}-f\right\|_p^p\\
&\le\frac{1}{2}(\|v_n-f\|_p^p+\|v_m-f\|_p^p).
\end{aligned}$$

Quindi,

$$\left\|\frac{v_n-v_m}{2}\right\|_p^p+l^p\le\left\|\frac{v_n-v_m}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{v_n+v_m}{2}-f\right\|_p^p\le\frac{1}{2}(2\cdot l^p+2\varepsilon),$$

per ogni $n,m\ge N_0$.

Quindi, per completezza di $L^p(\mathcal{A})$, la successione ha limite (chiamo v$=\lim_{n\to\infty} v_n$) e dunque per chiusura di S si ha che v $\in$ S.

A questo punto è facile concludere che v è una proiezione di f, perché $\|v-f\|_p = \lim_{n\to\infty} \|v_n - f\|_p = \inf\{\|f-h\|_p : h \in S\}$.

Caso $1 < p < 2$:

Il discorso è del tutto analogo al precedente, basta mostrare che la successione $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Utilizzando la disuguaglianza 2. del Lemma 1.4, otteniamo che:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{v_n - v_m}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{v_n + v_m}{2} - f\right\|_p^q \\
&\leq \left(\frac{\|v_n - f\|_p^p + \|v_m - f\|_p^p}{2}\right)^{q/p} \\
&\leq \left[\frac{1}{2}(2\cdot l^p + 2\cdot\varepsilon)\right]^{q/p}.
\end{aligned}$$

A questo punto si conclude come nel caso precedente.

□

Nella seguente Proposizione riportiamo le proprietà più semplici della proiezione π.

Proposizione 1.5. *Sia S un sottospazio vettoriale chiuso di $L^p(\mathcal{A})$ e $f \in L^p(\mathcal{A})$, allora l'applicazione di proiezione π soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $\pi(f) = f$ *se e solo se* $f \in S$,
2. $\pi(\xi f) = \xi\pi(f)$ *per ogni* $\xi \in \mathbb{R}$,
3. $\pi(f+h) = \pi(f) + h$ *per ogni* $h \in S$,
4. *se V è un altro sottospazio vettoriale di $L^p(\mathcal{A})$ ed è tale che $S \subseteq V$, allora vale che:*
   $\|f - \pi_V(f)\|_p \leq \|f - \pi_S(f)\|_p \; \forall f \in L^p(\mathcal{A})$,
5. $\|\pi(f)\|_p \leq 2\cdot\|f\|_p$, *per ogni p:* $1 \leq p \leq \infty$,
6. *l'applicazione π è continua.*

Dimostrazione.

1. ovvio dalla Definizione.
2. ξ=0 è ovvio; supponiamo $\xi \neq 0$:
   $\|\xi\pi(f) - \xi f\|_p = \xi\|\pi(f) - f\|_p \leq \xi\|h - f\|_p = \|\xi h - \xi f\|_p \;\; \forall h \in$ S.

Essendo S un sottospazio vettoriale questo si traduce, ponendo $\left(h = \frac{g}{\xi}\right)$, in:

$\|\xi\pi(f) - \xi f\|_p \leq \|g - \xi f\|_p$ per ogni $g \in$ S, si conclude usando l'unicità della proiezione (vedi 1.3).

3. $\|\pi(f) + h - (f + h)\|_p = \|\pi(f) - f\|_p \leq \|k - f\|_p = \|k + h - (f + h)\|_p$ $\forall k \in S$, e si conclude come prima usando che S è sottospazio vettoriale e che la proiezione è unica.

4. Segue dalla Definizione; l'insieme su cui faccio l'inf di π_S è contenuto in quello di π_V.

5. Dalla Definizione segue che: $\|\pi(f) - f\|_p \leq \|h - f\|_p$, per ogni $h \in S$, poichè $h \equiv 0 \in S$, sostituendo nell'espressione precedente otteniamo che:

$$\|\pi(f)\|_p - \|(f)\|_p \leq \|\pi(f) - f\|_p \leq \|f\|_p,$$

da cui segue la tesi.

6. Notiamo che la continuità in $f \equiv 0$ segue facilmente dalla proprietà precedente e dal fatto che $f \in S$, ma π non è lineare quindi il caso generale non è legato al caso $f \equiv 0$.

Sia ora $f \in L^p(\mathcal{A})$ qualsiasi, osserviamo che valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}\|\pi(f) - f\|_p - \|h\|_p &\leq \|\pi(f + h) - f\|_p - \|h\|_p \leq \|\pi(f + h) - (f + h)\|_p \\ &\leq \|\pi(f) - (f + h)\|_p \leq \|\pi(f) - f\|_p + \|h\|_p,\end{aligned}$$

da cui segue che:

$$\|\pi(f + h) - f\|_p \overset{\|h\|_p \to 0}{\longrightarrow} \|\pi(f) - f\|_p. \tag{1.1}$$

Se mostriamo che per ogni successione $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che verifica $\|h_n\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ vale che la successione $\{\pi(f + h_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, allora tale successione ha limite per completezza di L^p e il limite deve essere $\pi(f)$ perché vale la proprietà 1.1 e (per la Proposizione 1.3) è l'unica funzione in S che minimizza la distanza da f.

Dunque per avere la tesi rimane da mostrare che $\{\pi(f + h_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy.

Chiamiamo $l^p = \|\pi(f) - f\|_p^p$ ed esiste N_0 tale che per ogni $n, m \geq N_0$, si ha che:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{(\pi(f+h_n)-f)-(\pi(f+h_m)-f)}{2}\right\|_p^p \\
&\leq \left\|\frac{\pi(f+h_n)+\pi(f+h_m)}{2}-f\right\|_p^p + \left\|\frac{(\pi(f+h_n)-f)-(\pi(f+h_m)-f)}{2}\right\|_p^p \\
&\leq \frac{\|\pi(f+h_n)-f\|_p^p+\|\pi(f+h_m)-f\|_p^p}{2} \\
&\overset{1.1}{\leq} \frac{1}{2}\cdot(2\cdot l^p+2\cdot\varepsilon),
\end{aligned}$$

da cui:

$$\left\|\frac{\pi(f+h_n)-\pi(f+h_m)}{2}\right\|_p^p \leq \varepsilon.$$

□

1.2 La p-mediana

Studiamo ora il caso in cui proiettiamo le funzioni in un sottospazio vettoriale chiuso del tipo $S = L^p(\mathcal{B})$, dove $\mathcal{B}$ è una σ-algebra tale che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

Lemma 1.6. *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e sia $\mathcal{B}$ una σ-algebra tale che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, allora vale che $L^p(\mathcal{B})$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $L^p(\mathcal{A})$.*

Dimostrazione. Devo dimostrare che:

$\forall \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\mathcal{B})$ tale che $\exists f$: $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ nel (senso di L^p), allora $f \in L^p(\mathcal{B})$.

Effettivamente basta dimostrare che f è $\mathcal{B}$-misurabile. Usando risultati noti si ha che:

La convergenza di una successione in L^p implica la convergenza in probabilità, da cui deduciamo che esiste una sottosuccessione che converge quasi certamente. Quindi, per unicità del limite in L^p tale sottosuccessione deve convergere anch'essa a f in L^p.

A questo punto è facile concludere che f è $\mathcal{B}$-misurabile poiché limite quasi certo di successione di funzioni $\mathcal{B}$-misurabili.

□

Osserviamo che il Lemma precedente vale anche per $p = \infty$.

Il Lemma 1.6 ci permette di definire la proiezione:

$$\pi_{\mathcal{B}}\colon\ L^p(\mathcal{A}) \to L^p(\mathcal{B}),$$

dove $\pi_{\mathcal{B}}(f)$ soddisfa le due proprietà della Definizione 1.1.

Osservazione 1.7. Moralmente $\pi_{\mathcal{B}}(f)$ è la funzione che approssima meglio f avendo a disposizione un sottolivello di informazione, ovvero una sotto σ-algebra $\mathcal{B}$ di $\mathcal{A}$.

Definizione 1.8. Chiamiamo $\pi_{\mathcal{B}}$ *applicazione p-mediana relativa a* $\mathcal{B}$ e $\pi_{\mathcal{B}}(f)$ *p-mediana di* f *relativa a* $\mathcal{B}$.

Osservazione 1.9. Nell'articolo [LR81] una tale $\pi_{\mathcal{B}}(f)$ viene chiamata *prediction*, mentre nell'articolo [AA65] viene chiamata *p-mean relative to* $\mathcal{B}$.

Proposizione 1.10. *Sia* $\pi_{\mathcal{B}}$ *l'applicazione p-mediana relativa a* $\mathcal{B}$ *con* $1 < p < \infty$, *allora vale che:*

$$\pi_{\mathcal{B}}(\mathbb{1}_A \cdot f) = \mathbb{1}_A \cdot \pi_{\mathcal{B}}(f)$$

per ogni $A \in \mathcal{B}$ *e per ogni* $f \in L^p(\mathcal{A})$.

Dimostrazione. La tesi è equivalente all'affermazione:

$$\int_A |\pi_{\mathcal{B}}(f) - f|^p dP \leq \int_A |f - g|^p dP,$$

per ogni $g \in L^p(\mathcal{B})$, per ogni $A \in \mathcal{B}$.
Se per assurdo esistesse $g \in L^p(\mathcal{B})$ per cui valga il $>$ potrei definire:

$$\widetilde{g}(\omega) = \begin{cases} g(\omega) & \text{se } \omega \in A \\ \pi_{\mathcal{B}}(f(w)) & \text{se } \omega \notin A, \end{cases}$$

$\widetilde{g} \in L^p(\mathcal{B})$ e otterremmo che $\|\pi_{\mathcal{B}}(f)$ - $f\|_p \gneq \|\widetilde{g} - f\|_p$.

□

1.3 Confronto p-mediana-speranza condizionale

In questa sezione richiamiamo la Definizione di speranza condizionale e delle sue proprietà di base e osserveremo che c'è un parallelismo tra speranza condizionale e p-mediana.

Proposizione 1.11. *Data* $X \in L^1(\mathcal{A})$, *esiste (*unica a meno di equivalenza*) una v.a.* $Y \in L^1(\mathcal{B})$ *tale che si abbia, per ogni* $A \in \mathcal{B}$, $\int_A X dm = \int_A Y dm$.

Dimostrazione. La dimostrazione è una facile conseguenza del Teorema di Radon-Nikodym. □

Definizione 1.12. La funzione $Y \in L^1(\mathcal{B})$ che verifica la proprietà della Proposizione precedente si chiama **speranza condizionale** e si indica come $Y = \mathbf{E}[X|\mathcal{B}]$.

Riportiamo le seguenti proprietà della speranza condizionale senza dimostrazione:

Proposizione 1.13. *Sullo spazio $L^1(\mathcal{A})$ la speranza condizionale gode delle seguenti proprietà:*

1. $\mathbf{E}[X]=\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{B}]\ ]$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$,
2. $\mathbf{E}[aX+Y|\mathcal{B}]=a\mathbf{E}[X|\mathcal{B}]+\mathbf{E}[Y|\mathcal{B}]$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$,
3. *Se* $X \leq Y$ *q.c, allora* $\mathbf{E}[X|\mathcal{B}] \leq \mathbf{E}[Y|\mathcal{B}]$,
4. *Se* X *è* $\mathcal{B}$*-misurabile,* $\mathbf{E}[X|\mathcal{B}]=X$,
5. *Se* $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{B}]\ |\mathcal{D}]=\mathbf{E}[X|\mathcal{D}]$,
6. *Se* Y *è* $\mathcal{B}$*-misurabile e limitata,* $\mathbf{E}[XY|\mathcal{B}]=Y\mathbf{E}[X|\mathcal{B}]$,
7. *Se* $X_n \uparrow X$ *q.c.,* $\mathbf{E}[X_n|\mathcal{B}] \uparrow \mathbf{E}[X|\mathcal{B}]$ *q.c.,*
8. *Se* $X \in L^p(\mathcal{A})$, *allora* $\mathbf{E}[X|\mathcal{B}] \in L^p(\mathcal{B})$.

Definizione 1.14. Chiamiamo *speranza condizionale* $\mathbf{E}_{\mathcal{B}}$: $L^p(\mathcal{A}) \rightarrow L^p(\mathcal{B})$, l'applicazione tale che $\mathbf{E}_{\mathcal{B}}[f]=\mathbf{E}[f|\mathcal{B}]$.

Nel seguito di questa sezione, se non specificato, lavoreremo sullo spazio $L^p(\mathcal{A})$ e denoteremo con $\mathcal{B}$ una sotto σ-algebra di $\mathcal{A}$.

Definizione 1.15. Nel seguito della tesi useremo la seguente notazione: $f^{\underline{r}}(\omega)=\text{sgn}(f(\omega)) \cdot |f(\omega)|^r, \quad \forall r > 0$.

Teorema 1.16. *Sia* $f \in L^p(\mathcal{A})$, *allora la p-mediana* $\pi_{\mathcal{B}}(f)$ *è legata alla speranza condizionale* $\boldsymbol{E}_{\mathcal{B}}[f]$ *tramite la relazione:*

$$\boldsymbol{E}_{\mathcal{B}}[(f - \pi_{\mathcal{B}}(f))^{\underline{r}}]=0, \text{ con } r=p-1.$$

Dimostrazione. Fissato g una qualsiasi funzione di $L^p(\mathcal{B})$, (per esempio $g = \mathbb{1}_A$, con $A \in \mathcal{B}$). Chiamiamo $H : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, \quad \text{H}(\alpha) = \|f-\pi_{\mathcal{B}}(f)+\alpha \cdot g\|_p^p$.

Dalla Definizione di $\pi_{\mathcal{B}}(f)$ si verifica facilmente che H ha un minimo in 0, quindi la sua derivata in 0 si deve annullare. Dunque se potessimo portare la derivata sotto segno di integrale otterremmo: $\frac{dH(\alpha)}{d\alpha}(0) = p \cdot \int_A (f-\pi_{\mathcal{B}}(f))^{\underline{r}} dP$, che è la tesi.

Effettivamente possiamo portare la derivata sotto segno di integrale in quanto: $(f-\pi_{\mathcal{B}}(f)) \in L^p(\mathcal{A}) \Rightarrow (f-\pi_{\mathcal{B}}(f)) \in L^r(\mathcal{A})$, (dunque abbiamo stima uniforme sulla derivata). A questo punto un Teorema classico di teoria della misura ci assicura che possiamo portare la derivata sotto segno di integrale. $\square$

Osservazione 1.17. Osserviamo che il Teorema precedente ci dimostra che nel caso particolare di $p = 2$ la p-mediana coincide con la speranza condizionale, infatti dal Teorema 1.16 segue che $\mathbf{E}_{\mathcal{B}}[f\text{-}\pi_{\mathcal{B}}(f)]= 0$ e dalla linearità della speranza condizionale otteniamo che $\mathbf{E}_{\mathcal{B}}[f\ ]=\pi_{\mathcal{B}}(f)$, poiché $\pi_{\mathcal{B}}(f)$ è $\mathcal{B}-$misurabile.

Riportiamo un risultato che non dimostriamo, per una dimostrazione si veda [LR81].

Proposizione 1.18. *Sia $f \in L^p(\mathcal{A})$ e $1 < p < \infty$. L'unica funzione $g \in L^p(\mathcal{B})$ che verifica:*

$$\boldsymbol{E}_{\mathcal{B}}[(f\text{ - }g)^{\underline{r}}]= 0, \text{ con } r = p - 1,$$

è la p-mediana.

Corollario 1.19. *Per ogni $f \in L^p(\mathcal{A})$, vale che $\pi_{\mathcal{B}}(f \cdot g) = \pi_{\mathcal{B}}(f) \cdot g$, per ogni $g \in L^p(\mathcal{B})$.*

Dimostrazione. Sia $r = p - 1$. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\mathbf{E}_{\mathcal{B}}[\ (g\ f\text{ - }g\ \pi_{\mathcal{B}}(f))^{\underline{r}}]= \mathbf{E}_{\mathcal{B}}[g^{\underline{r}}\ (f\text{ - }\pi_{\mathcal{B}}(f))^{\underline{r}}]= g^{\underline{r}}\ \mathbf{E}_{\mathcal{B}}[(f\text{ - }\pi_{\mathcal{B}}(f))^{\underline{r}}]= 0,$$

quindi per l'unicità della funzione che verifica tale ugualianza, dovuta alla Proposizione precedente, si ottiene che $\pi_{\mathcal{B}}(f \cdot g) = \pi_{\mathcal{B}}(f) \cdot g$.

□

Osservazione 1.20. Nell'articolo [LR81] si estende la Definizione di p-mediana imponendo che valga l'uguaglianza $\mathbf{E}_{\mathcal{B}}[(f\text{ - }\pi_{\mathcal{B}}(f))^{\underline{p-1}}]= 0$, richiedendo solo che $f \in L^{p-1}(\mathcal{A})$.

Teorema 1.21. *La p-mediana $\pi_{\mathcal{B}}$ è monotona, cioè:*

$$f \geqslant g \Rightarrow \pi_{\mathcal{B}}(f) \geqslant \pi_{\mathcal{B}}(g), \text{ per ogni } f, g \in L^p(\mathcal{A}).$$

Dimostrazione. Se $f \geqslant g$ q.c., chiamo A=$\{\pi_{\mathcal{B}}(f) \lneq \pi_{\mathcal{B}}(g)\}$, la tesi è verificare che $P(A) = 0$.

Osserviamo che A $\in \mathcal{B}$. Chiamiamo $h = \mathbb{1}_A \cdot (f - \pi_{\mathcal{B}}(f))$ e $l = \mathbb{1}_A \cdot (g - \pi_{\mathcal{B}}(g))$, segue facilmente che $h \geq l$. Inoltre dalla Proposizione 1.5 e dalla Proposizione 1.10 otteniamo che $\pi_{\mathcal{B}}(h)$=$\pi_{\mathcal{B}}(l)$= 0. Allora dal Teorema 1.16 si ha che $\mathbf{E}_{\mathcal{B}}(h^{\underline{p-1}})$=$\mathbf{E}_{\mathcal{B}}(l^{\underline{p-1}})$=0, quindi dalla Definizione di speranza condizionale segue che

$$\int_\Omega h^{\underline{p-1}} = \int_\Omega l^{\underline{p-1}} = 0.$$

ma poiché $h^{\underline{p-1}} \geq l^{\underline{p-1}}$, allora $h = l$ q.c. $\Rightarrow P(A) = 0$.

□

Esempio 1.22. Alcune semplici proprietà, valide per la *speranza condizionale* (vedi Proposizione 1.13), non valgono per la p-mediana ($p \neq 2$):

1. L'applicazione $\pi_{\mathcal{B}}$ non è lineare.

2. Se $\mathcal{D}, \mathcal{B}, \mathcal{A}$ sono σ-algebre: $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ e:

$$\begin{tikzcd} L^p(\mathcal{A}) \arrow[r, "\pi_{\mathcal{B}}"] \arrow[rr, bend right, "\pi_{\mathcal{D}}"'] & L^p(\mathcal{B}) \arrow[r, "\widetilde{\pi}_{\mathcal{D}}"] & L_p(\mathcal{D}). \end{tikzcd}$$

Allora non è detto che valga: $\pi_{\mathcal{D}} = \widetilde{\pi}_{\mathcal{D}} \circ \pi_{\mathcal{B}}$, vediamo i due controesempi:

1. Lavoriamo con $L^\infty(\mathcal{A})$ dove $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A}$=σ-algebra di Borel, P la misura di *Lebesgue* e prendiamo come $\mathcal{B}$ la σ-algebra banale cioè $\{\emptyset, \Omega\}$. Consideriamo:

$$g_1(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{se } \omega \in [0,1/2), \\ 0 & \text{se } \omega \in [1/2,1] \end{cases} \quad \text{e} \quad g_2(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \in [0,2/3), \\ 2 & \text{se } \omega \in [2/3,1]. \end{cases}$$

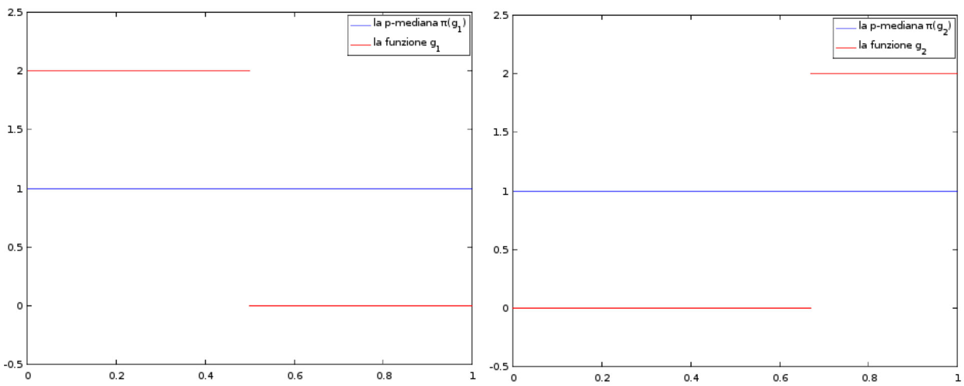


Figura 1.1: A sinistra troviamo il grafico di g_1 e della sua p-mediana $\pi_{\mathcal{B}}(g_1)$, a destra troviamo il grafico di g_2 e della sua p-mediana $\pi_{\mathcal{B}}(g_2)$.

   È facile provare che, $\pi_{\mathcal{B}}(g_1 + g_2) = \mathbb{1}_{[0,1]} \neq \pi_{\mathcal{B}}(g_1) + \pi_{\mathcal{B}}(g_2) = 2 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}$ (è una facile conseguenza del Teorema 3.6). Inoltre grazie al Lemma 3.7, questo controesempio funziona anche per $p \gg 1$.

2. Lavoriamo, come prima, con $L^p(\mathcal{A})$ dove $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A}$ la σ-algebra di Borel, P la misura di *Lebesgue*. Siano inoltre $\mathcal{D}$ la σ-algebra banale e $\mathcal{B}$ la σ-algebra generata da {[0,1/3],(1/3,1] }. Consideriamo:

$$f(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [0, 1/3], \\ 2 & \text{se } \omega \in (1/3, 2/3], \\ 3 & \text{se } \omega \in (2/3, 1]. \end{cases}$$

Si vede facilmente che $f \in L^p(\mathcal{A})$, inoltre abbiamo che:

$$\pi_{\mathcal{D}}(f)(\omega) = 2 \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}, \;\; \pi_{\mathcal{B}}(f)(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [0, 1/3), \\ 2.5 & \text{se } \omega \in [1/3, 1]. \end{cases}$$

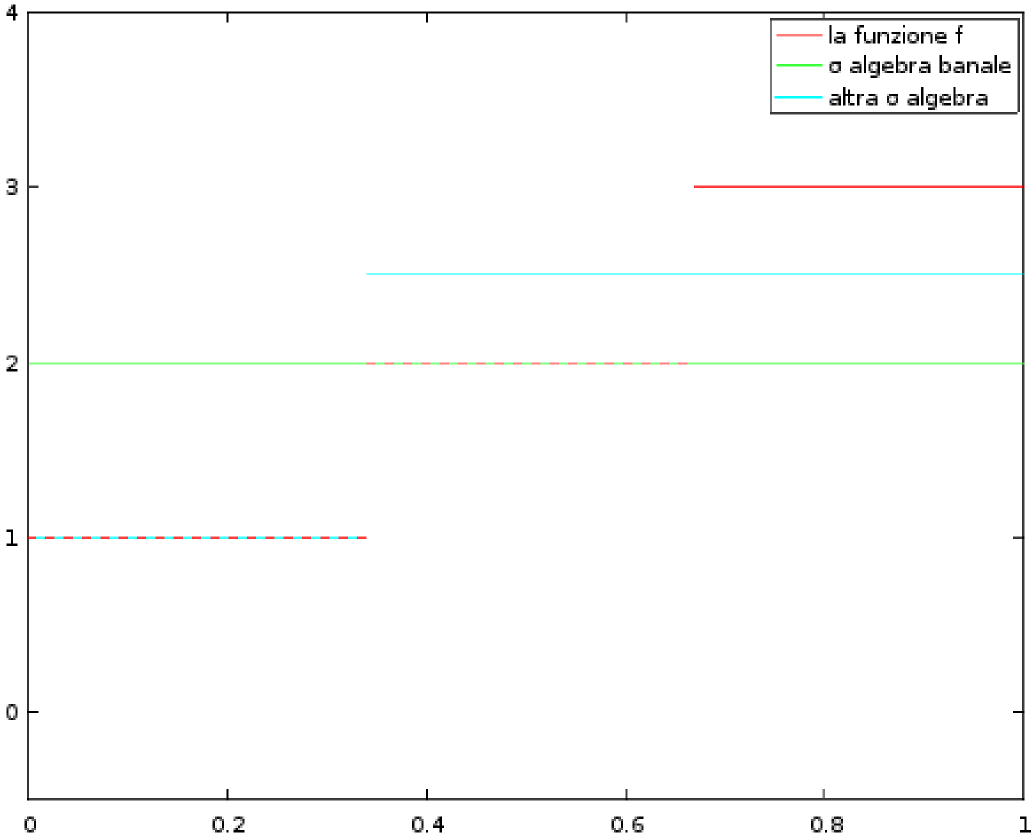


Figura 1.2: Nel grafico troviamo in rosso la funzione f, in verde la funzione $\pi_{\mathcal{D}}(f)$ e in azzurro la funzione $\pi_{\mathcal{B}}(f)$.

e dunque: $\widetilde{\pi}_{\mathcal{D}} \circ \pi_{\mathcal{B}}(f) = k \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}$, dove $k = \mathit{cost}$.

Dal Teorema 3.6 segue facilmente che per $p = \infty$ si ha che $k = 1.75$. Dunque il controesempio è valido per $p \ggg 1$, per il Lemma 3.7.

1.4 Estensione a valori in $\mathbb{R}^n$

Vogliamo definire la p-mediana anche per funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità, e sia $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione $\mathcal{A}$-misurabile

Fino ad ora abbiamo usato la notazione $\|\cdot\|_p$ per indicare la norma L^p. In questa sezione useremo la seguente notazione:

- $|\cdot|_p$ per indicare la norma l^p di vettori in $\mathbb{R}^n$,
- $\|\cdot\|_{L^p}$ per indicare la norma L^p per funzioni in L^p,

indichiamo semplicemente $|\cdot|$, la norma euclidea in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.23. Diciamo che una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, appartiene a $L^p(\mathcal{B}, \mathbb{R}^n)$ se f è $\mathcal{B}$-misurabile e $|f(\omega)|$ sta in L^p come funzione a valori reali.

$L^p(\mathcal{B}, \mathbb{R}^n) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}^n : |f(\omega)| \in L^p$ e f è $\mathcal{B}$-misurabile$\}$.

Definizione 1.24. Chiamiamo p-s-mediana di $f \in L^p(\mathcal{A}, \mathbb{R}^n)$, *relativa alla σ-algebra $\mathcal{B}$*, una funzione $\pi_{p,s,\mathcal{B}}(f)$, che verifica:

- $\pi_{p,s,\mathcal{B}}(f) \in L^p(\mathcal{B}, \mathbb{R}^n)$,
- $\|\pi_{p,s,\mathcal{B}}(f) - f\|_{L^p} = \inf\{\left(\int_\Omega |f(\omega) - h(\omega)|_s^p \, dP\right)^{1/p} : h \in L^p(\mathcal{B}, \mathbb{R}^n)\}$.

Osservazione 1.25. Si possono ripetere, similmente al caso di funzioni a valori in $\mathbb{R}$, gli argomenti per dimostrare esistenza e unicità per $1 < p < \infty$ ed esistenza per $p = \infty$ (per questo caso si veda il Capitolo 3).

Ci chiediamo se per il caso di funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ $\pi_{p,s,\mathcal{B}}(f)$ soddisfa alcune proprietà di base che ci permetterebbero di lavorare con funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$:

1. $\pi_{p,\mathcal{B}}(f \cdot w) = \pi_{p,s,\mathcal{B}}(f) \cdot w$, per ogni $w \in R^n$, similmente alla Proposizione 1.5 per funzioni a valori in $\mathbb{R}$,
2. $|\pi_{p,s,\mathcal{B}}(f)|_s \leq \pi_{p,\mathcal{B}}(|f|_s)$, seguendo il fatto che la p-mediana è monotona, vedi Teorema 1.21.

Esempio 1.26. Vediamo che 1. non vale.

Prendiamo per semplicità $p = \infty$, ragionando in modo simile, ma facendo più conti, otterremmo che il controesempio sarà valido anche per p molto grandi. Lasciamo s arbitrario ($s < p$ nel caso di $p \neq \infty, p \gg 1$).

Consideriamo dunque $L_s^\infty(\mathcal{A})$ con $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$, dove $\sigma(\mathcal{B})$ è la sigma algebra dei boreliani. Consideriamo adesso la sotto σ-algebra banale $\mathcal{B} = \{\Omega, \emptyset\}$.

Sia $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, dove: $f_1(x) = \mathbb{1}_{[1/3,2/3)}(x)$ e

$$f_2(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in [1/3+\varepsilon, 2/3-\varepsilon), \\ -1 & se\ x \in [1/3, 1/3+\varepsilon)\ \vee\ [2/3-\varepsilon, 2/3), \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

La infinito-mediana verifica: $\pi_{\infty,s,\mathcal{B}}(f) = arg \inf_{g \in L^{\infty,\mathbb{R}^n}(\mathcal{B})}(\sup_{x\in\Omega}(|f_1(x) - g_1(x)|^s + |f_2(x) - g_2(x)|^s)^{1/s})$, dove il sup è in realtà un sup-P-q.c. .

Poiché $\mathcal{B}$ è la sigma algebra banale, la funzione $\pi_{\infty,s,\mathcal{B}}(f)$ è costante. È facile verificare che: $\pi_{\infty,s,\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Consideriamo: $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Abbiamo che:

$$f \cdot w = \begin{cases} 2 & [1/3+\varepsilon, 2/3-\varepsilon), \\ 0 & altrove. \end{cases}$$

- $\pi_{\infty,s,\mathcal{B}}(f) \cdot w = 1/2$,
- $\pi_{\infty,\mathcal{B}}(f \cdot w) = 1$.

In effetti non vale che la p-s-mediana è fatta come componenti di p-mediane.

Osservazione 1.27. L'esempio precedente è un'altra prova non vale la linearità della p-mediana.

La seconda proprietà rimane un caso aperto per il nostro lavoro di tesi.

Proposizione 1.28. *Consideriamo $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ spazio di probabilità e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ una sotto σ-algebra.*

Se $p = s$, allora per ogni $f \in L^p_p(\mathcal{A})$, a valori in $\mathbb{R}^n$, valgono:

1. $\pi_{p,\mathcal{B}}(f \cdot w) = \pi_{p,p,\mathcal{B}}(f) \cdot w$, *per ogni* $w \in R^n$,
2. $|\pi_{p,p,\mathcal{B}}(f)|_p \leq \pi_{p,\mathcal{B}}(|f|_p)$.

Dimostrazione. Prendiamo $f \in L^p(\mathcal{A}, \mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathcal{B}, \mathbb{R}^n)$: $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ e $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$.

Quindi otteniamo che:

$$\int_\Omega \|f(\omega)-g(\omega)\|_p^p \; dP = \int_\Omega \sum_{i=1}^n |f_i(\omega)-g_i(\omega)|^p \; dP = \sum_{i=1}^n \int_\Omega |f_i(\omega)-g_i(\omega)|^p \; dP,$$

Se g minimizza, allora ogni sua componente minimizza, poichè se g è $\mathcal{B}$-misurabile allora ogni sua componente è $\mathcal{B}$-misurabile. Quindi $g_i = \pi_{\mathcal{B},p}(f_i)$.

Dunque la proprietà 1. segue dalla Proposizione 1.10 (applicata a ogni componente della funzione), e la proprietà 2. segue dal Teorema 1.21 (applicata a ogni componente della funzione).

$\square$

Capitolo 2

Teoremi di convergenza

Nel capitolo precedente ci siamo ristretti a confrontare la p-mediana di due diverse funzioni o della stessa funzione ma con un numero finito di σ-algebre distinte.

In questo capitolo fissiamo $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e una successione $\{\mathcal{B}_n\}_n$ di σ-algebre contenute in $\mathcal{A}$ convergenti crescendo alla σ-algebra $\mathcal{B}_\infty$ nel senso che:

$$\sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n\right) = \mathcal{B}_\infty.$$

L'obiettivo principale sarà quello di provare la convergenza quasi certa delle $\pi_{\mathcal{B}n}(f)$ a $\pi_{\mathcal{B}\infty}(f)$, dove f è una funzione in $L^p(\mathcal{A})$. Dimostriamo anche la convergenza in L^p e la disuguaglianze massimali deboli e forti per $\sup_{n\in\mathbb{N}}$ $\pi_{\mathcal{B}n}$.

Per semplicità nel seguito della tesi chiameremo la successione $\{\pi_{\mathcal{B}n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ più semplicemente $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Osservazione 2.1. Noi lavoreremo con σ-algebre $\{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ crescenti, il discorso con quelle decrescenti è simile e non lo riportiamo.

2.1 Convergenza in L^p

Prima di dimostrare la convergenza quasi certa, che è un risultato più complesso, mostriamo la convergenza in $L^p(\mathcal{A})$ delle $\pi_n(f)$.

Osservazione 2.2. Se $\{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è tale che $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_{n+1}$, allora vale che $L^p(\mathcal{B}_n)$ $\subseteq L^p(\mathcal{B}_{n+1})$.

Lemma 2.3. $\|f - \pi_{n+1}(f)\|_p \leq \|f - \pi_n(f)\|_p$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

La dimostrazione del Lemma precedente è un'ovvia conseguenza della proprietà 4. della Proposizione 1.5 e dell'osservazione 2.2.

Enunciamo un Lemma la cui dimostrazione è un esercizio teorico di teoria della misura:

Lemma 2.4. *Sia $\{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione crescente di σ-algebre tali che $\mathcal{B}_n \nearrow \mathcal{B}_\infty$. Allora per ogni p: $1 \leq p < \infty$ si ha che $\bigcup\limits_n L^p(\mathcal{B}_n)$ è denso in $L^p(\mathcal{B}_\infty)$.*

Per una dimostrazione di questo Lemma si veda [Let13, cap. IV, sez. 7].

Questo Lemma non vale per il caso $p = +\infty$. Vediamone un controesempio.

Esempio 2.5. Consideriamo la successione di σ-algebre: $\{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\mathcal{B}_n = \sigma\{[k \cdot 2^{-n}, (k+1)\cdot 2^{-n}) | k = 0, ..., 2^n - 1\}$.

Ricordiamo che gli intevalli del tipo $[k \cdot 2^{-n}, (k+1)\cdot 2^{-n})$ si chiamano *intervalli diadici* e $k \cdot 2^{-n}$ *numeri diadici.*

Dimostriamo che: $\sigma(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n) = \sigma(\mathcal{B})$, dove $\sigma(\mathcal{B})$ è la σ-algebra generata dagli aperti di $\mathbb{R}$. Il contenimento $\subseteq$ è ovvio poichè $\mathcal{B}_n \subseteq \sigma(\mathcal{B})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per l'altro contenimento basta dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che $(a, b) = \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{[k\cdot 2^{-n},(k+1)\cdot 2^{-n})\subseteq(a,b)} [k \cdot 2^{-n}, (k+1)\cdot 2^{-n})$.

$\supseteq$) ovvio per come sto facendo l'unione.

$\subseteq$) Usiamo la densità dei numeri diadici in $\mathbb{R}$. Se per assurdo esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $x_0 \notin \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{[k\cdot 2^{-n},(k+1)\cdot 2^{-n})\subseteq(a,b)} [k \cdot 2^{-n}, (k+1)\cdot 2^{-n})$. Allora esistono $k, n \in \mathbb{N}$, tale che $[k \cdot 2^{-n}, (k+1)\cdot 2^{-n}) \subseteq (a, b)$ e $x_0 \in [k \cdot 2^{-n}, (k+1)\cdot 2^{-n})$. Da cui l'assurdo.

Prendiamo ora $A = [0, t)$ con $t \in (a, b)\backslash(\mathbb{Q} \cap (a, b))$.

Allora per ogni $f \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^\infty(\mathcal{B}_n)$ è facile verificare che:

$$\|f - \mathbb{1}_A\|_\infty \geq 1/2.$$

Teorema 2.6. *Se $f \in L^p(\mathcal{B}_\infty)$, $1 < p < \infty$ allora vale che $\pi_n(f) \xrightarrow{L^p} f$.*

Dimostrazione. Dimostriamo il Lemma solo per $2 \leq p < \infty$, il caso $1 < p < 2$ si fa similmente utilizzando la disuguaglianza 2. del Lemma 1.4.

Dal Lemma precedente 2.3, abbiamo che la successione $\|f - \pi_n(f)\|_p$ è decrescente in n. Quindi otteniamo che:

$$\|f - \pi_n(f)\|_p \searrow \inf_m\{\|f - \pi_m(f)\|_p\} = l.$$

Dobbiamo dimostrare che la successione $\{\pi_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in L^p, da cui per completezza di L^p, esiste il limite delle $\pi_n(f) \xrightarrow{L^p} \widetilde{f}$, e infine risulterà che $f = \widetilde{f}$, cioè la tesi.

Per la disuguaglianza del Lemma 2.3 e la disuguaglianza 2. del Lemma 1.4 si ha che:

$$\|\pi_m(f) - f\|_p^p + \left\|\frac{\pi_n(f) - \pi_m(f)}{2}\right\|_p^p$$

$$\stackrel{2.3}{\leq} \left\|\frac{(f - \pi_n(f)) - (\pi_m(f) - f)}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{(f - \pi_n(f)) + (\pi_m(f) - f)}{2}\right\|_p^p$$

$$\stackrel{1.4}{\leq} 1/2 \cdot \{\|(f - \pi_n(f))\|_p^p + \|(\pi_m(f) - f)\|_p^p\}.$$

Quindi isolando il termine che ci interessa nel membro di sinistra della disuuaglianza, otteniamo:

Per ogni $\varepsilon \geqslant 0$ esiste $N_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geqslant N_0$ si ha:

$$\left\|\frac{\pi_n(f) - \pi_m(f)}{2}\right\|_p^p \leq 1/2 \cdot \{\{\|(f - \pi_n(f))\|_p^p - \|(\pi_m(f) - f)\|_p^p\}\}$$
$$\leq 1/2 \cdot \{l^p + \varepsilon - l^p\} \leq \varepsilon.$$

Quindi per la completezza di L^p si ha: $\pi_n(f) \xrightarrow{L^p} \widetilde{f}$;

Dalla Definizione 1.1 si ha:

$$\|(f - \pi_n(f))\|_p \leq \|(f - v)\|_p,$$

per ogni $v \in L(\mathcal{B}_n)$, quindi passando al limite su n otteniamo che:

$$\|(f - \widetilde{f})\|_p \leq \|(f - v)\|_p.$$

A questo punto sfruttando il Lemma 2.4 si ottiene che $\|(f - \widetilde{f})\|_p \leq 0$, che è la tesi. □

Osservazione 2.7. Si vede facilmente che vale un'estensione del Teorema precedente: per ogni $f \in L^p(\mathcal{A})$si ha che $\pi_n(f) \xrightarrow{L^p} \pi_\infty(f)$, dove $\pi_\infty(f)$ indica la p-mediana rispetto la σ-algebra $\mathcal{B}_\infty$.

2.2 Convergenza quasi certa

Adesso l'obiettivo è quello di dimostrare la convergenza quasi certa delle $\pi_n(f) \xrightarrow{q.c.} \pi_\infty(f)$.

Osservazione 2.8. Sappiamo che la convergenza in L^p implica la convergenza in probabilità (grazie alla disuguaglianza di Markov); dalla convergenza in probabilità segue la convergenza quasi certa di una sottosuccessione. Quindi dal Teorema 2.6 possiamo dedurre solo che esiste una sottosuccessione: $\pi_{n_k}(f) \xrightarrow{q.c.} \pi_\infty(f)$.

Il Lemma seguente è una generalizzazione del Lemma 2.3.

Lemma 2.9. *Sia $\{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sigma algebre crescenti. Se $A_j \in \mathcal{B}_j$ $(1 \leq j \leq n)$ con $\bigcup_{j=1}^n A_j = \Omega$, allora*

$$\|f - \pi_1(f)\|_p \geqslant \|f - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j} \cdot \pi_j(f)\|_p \geqslant \|f - \pi_n(f)\|_p.$$

Dimostrazione. Vogliamo procedere per induzione su n, dove n è il numero di insiemi disgiunti nelle prime n σ-algebre. Sia f una funzione in $L^p(\mathcal{A})$ fissata.

Il caso $n = 1$ è banale.

Supponiamo che l'affermazione sia vera fino a $n-1$ per qualsiasi funzione in $L^p(\mathcal{A})$, vorremmo allora dire che vale anche per n.

Sia $A_1 \in \mathcal{B}_1$ e sia $B \in \mathcal{B}_1$ il suo complementare, allora dalla Proposizione 1.10 si ha:

$$\pi_1(f) \cdot \mathbb{1}_{A_1} = \pi_1(f \cdot \mathbb{1}_{A_1}) \quad e \quad \pi_1(f) \cdot \mathbb{1}_B = \pi_1(f \cdot \mathbb{1}_B),$$

quindi dal Lemma 2.3 si ha che:

$$\|\mathbb{1}_{A_1} \cdot (f - \pi_1(f))\|_p = \|\mathbb{1}_{A_1} \cdot f - \pi_n(\mathbb{1}_{A_1} \cdot f)\|_p \geqslant \|\mathbb{1}_{A_1} \cdot (f - \pi_n(f))\|_p,$$

e anche

$$\|\mathbb{1}_B \cdot (f - \pi_1(f))\|_p \geqslant \|\mathbb{1}_B \cdot f - \pi_2(\mathbb{1}_B \cdot f)\|_p.$$

Chiamiamo $B_2 = A_1 \cup A_2$ e $B_j = A_j$, $j = 3, .., n$, e applichiamo l'ipotesi induttiva a $\mathbb{1}_B \cdot f$ e agli insiemi $\{B_j\}_{j=2}^n$ e otteniamo:

$$\|\mathbb{1}_{\mathbb{B}} \cdot f - \pi_2(\mathbb{1}_{\mathbb{B}} \cdot f)\|_p \geqslant \|\mathbb{1}_{\mathbb{B}} \cdot (f - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j} \cdot \pi_j(f))\|_p \geqslant \|\mathbb{1}_{\mathbb{B}} \cdot (f - \pi_n(f))\|_p.$$

L'asserzione dunque segue dalla proprietà 1.10 e dal fatto che:

$$\|g\|_p^p = \|\mathbb{1}_{A_1} \cdot g\|_p^p + \|\mathbb{1}_B \cdot g\|_p^p.$$

□

Siamo adesso pronti a dimostrare il Teorema di convergenza quasi certa.

Teorema 2.10. *Sia $\{\mathcal{B}_n\}_n$ una famiglia di σ algebre crescenti, tali che $\sigma(\bigcup \mathcal{B}_n) = \mathcal{B}_\infty$. Sia $f \in L^p(\mathcal{A})$, allora vale che $\pi_n(f)$ converge q.c. a $\pi_\infty(f)$.*

Dimostrazione. Definiamo $h(\omega) = \limsup \pi_n(f)(\omega) - \liminf \pi_n(f)(\omega)$, per ogni $\omega \in \Omega$. La tesi è equivalente a provare l'asserzione: $P(h > 0) = 0$. Infatti per l'Osservazione 2.8 si deduce che se avesse un limite q.c. allora deve essere proprio $\pi_\infty(f)$.

Verifichiamo dunque che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono α_ε, $\beta\varepsilon$ tali che:

$$\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad e \quad P(h > \alpha_\varepsilon) \le \beta_\varepsilon.$$

Sia $\gamma > 0$ arbitrario e sia n=n(ε), tale che

$$\|f - \pi_n(f)\|_p \le \varepsilon/2,$$

e siano:

$$A_1 = \{\omega \in \Omega : |\pi_{n+1}(f) - \pi_n(f)| > \gamma\},$$

$$A_j = \{\omega \in \Omega : |\pi_{n+j}(f) - \pi_n(f)| > \gamma\} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$$

per $j = 2, .., k$ e

$$A_{k+1} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i,$$

è facile osservare che $A_j \in \mathcal{B}_{n+j}$, che sono insiemi la cui unione è Ω e che sono a due a due disgiunti.

Dunque applicando il Lemma precedente otteniamo:

$$\begin{aligned} \|f - \pi_n(f)\|_p &\ge \|f - \pi_{n+1}(f)\|_p \\ &\ge \|f - \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{1}_{A_j} \cdot \pi_{n+j}(f)\|_p \end{aligned}$$

Quindi dalla scelta di n(ε):

$$\|\pi_n(f) - \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{1}_{A_j} \cdot \pi_{n+j}(f)\|_p = \|\pi_n(f) - f + f - \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{1}_{A_j} \cdot \pi_{n+j}(f)\|_p$$

$$\le \|\pi_n(f) - f\|_p + \|f - \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{1}_{A_j} \cdot \pi_{n+j}(f)\|_p \le \varepsilon.$$

Siccome, su A_{k+1}, vale che:

$$|\pi_n(f) - \pi_{n+j}(f)| \le \gamma,$$

per ogni $j = 1, .., k$, ne segue che, su A_{k+1}, si ha:

$$\begin{aligned}&|\pi_{n+i}(f) - \pi_{n+j}(f)|\\ &\leq |\pi_{n+i}(f) - \pi_n(f) + \pi_n(f) - \pi_{n+j}(f)|\\ &\leq |\pi_{n+i}(f) - \pi_n(f)| + |\pi_n(f) - \pi_{n+j}(f)| \leq 2 \cdot \gamma,\end{aligned}$$

per ogni $j, i = 1, .., k$ e per ogni $\omega \in A_{k+1}$.

Da cui otteniamo che $|\sup_{0\leq j\leq k} \pi_{n+j}(f) - \inf_{0\leq j\leq k} \pi_{n+j}(f)| \leq 2 \cdot \gamma$ su A_{k+1}.

Segue che:

$$\begin{aligned}&P\left(|\sup_{0\leq j\leq k} \pi_{n+j}(f) - \inf_{0\leq j\leq k} \pi_{n+j}(f)| > 2 \cdot \gamma\right)\\ &\leq P\left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \overset{Markov}{\leq} \frac{1}{\gamma^p} \cdot \|\pi_n(f) - \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{1}_{A_j} \cdot \pi_{n+j}(f)\|_p^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^p.\end{aligned}$$

Mandando $k \to +\infty$ si ottiene che:

$$P\left(|\sup_{j\geq n} \pi_j(f) - \inf_{j\geq n} \pi_j(f)| > 2 \cdot \gamma\right) \leq \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^p.$$

Osservando che:

$$h \leq \sup_{j\geq n} \pi_j(f) - \inf_{j\geq n} \pi_j(f),$$

questo implica

$$P(h > 2 \cdot \gamma) \leq \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^p.$$

Scegliendo $\gamma = \sqrt{\varepsilon}$ si ottiene che $\alpha_\varepsilon = 2 \cdot \sqrt{\varepsilon}$ e $\beta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^p}$ da cui la tesi. $\square$

2.3 Disuguaglianza massimale

In questa sezione proveremo due disuguaglianze massimali e ne daremo un'applicazione della convergenza in norma.

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità e consideriamo $L^p(\mathcal{A})$come descritto nel capitolo 1. Diciamo che X $\in L^p(\mathcal{A})$ con p: $0 < p < +\infty$, se è $\mathcal{A}$-misurabile ed è tale che $\|X\|_p < +\infty$; osserviamo che $\|\cdot\|_p$ non è sempre una norma ($p < 1$).

I risultati trattati in questa sezione si potrebbero dimostrare lavorando con reticoli anzichè usare le σ-algebre:

Osservazione 2.11. Chiamiamo $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ *reticolo se verifica:*

- *è chiusa per unione numerabile,*
- *è chiusa per intersezione numerabile.*

Osservazione 2.12. Facili esempi mostrano che un *reticolo non è detto che sia chiuso per passaggio al complementare.*

Lemma 2.13. *Sia* $1 < p < \infty$. *Allora valgono le seguenti disuguaglianze tra numeri reali:*

1. $a^{p-1} + 2^{p-2}(x-a)^{\underline{p-1}} \leq 2^{p-2} \cdot x^{\underline{p-1}}$, *se* $a \geq 0$, $p \geq 2, x \in \mathbb{R}$
2. $a^{p-1} + (x-1)^{\underline{p-1}} \leq 2^{2-p} \cdot x^{p-1}$, *se* $a, x \geq 0$ *e* $1 < p < 2$.

Dimostrazione. 1.) Dividendo la 1. per a^{p-1} otteniamo che è sufficiente provare che:

$$f(z) := 1 + 2^{p-2}(z-1)^{\underline{p-1}} \leq 2^{p-2} \cdot z^{p-1} = g(z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Poichè $f(0) \leq g(0)$ e $f'(z) \leq g'(z)$ per $z \leq 0$, allora ho che $f(z) \leq g(z)$, per ogni $z \leq 0$. Per lo stesso motivo $f(z) \geq g(z)$ per ogni $z \geq 1$.

Resta il caso $0 < z < 1$:

studiando la funzione $h(z) = g(z) - f(z)$ si ha che derivando, otteniamo che la funzione h ha minimo in $z_0 = 1/2$ e vale che $h(z_0) = 0$. Quindi la disuguaglianza 1. è vera per ogni $z \in \mathbb{R}$.

2.) Si procede in modo analogo dividendo ambo i membri per a^{p-1} e definendo le funzioni $f(z)$ e $g(z)$ rispettivamente del membro di sinistra e di destra della disuguaglianza e osservando che $f(0) = g(0)$ e $f'(z) \leq g'(z)$ per ogni $z \geq 0$.

□

Teorema 2.14. *Sia* $p : 1 < p < +\infty$ *e* $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}$ *una successione di* σ*-algebre monotona. Per ogni* $f \in L^{p-1}(\mathcal{A})$ *non negativa abbiamo che:*

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{B}_n}(f) > a\right) \leq \frac{2^{|p-2|}}{a^{p-1}} \int_{(\sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{B}_n}(f) > a)} f^{p-1} dP, \;\; a > 0.$$

Noi ci limitiamo a dimostrarlo per σ-algebre, per una dimostrazione completa con *reticoli* rimandiamo all'articolo [LR81].

Dimostrazione. Chiamiamo per semplicità $f_n = \pi_{\mathcal{B}n}(f)$ con $n \in \mathbb{N}$.

È sufficiente mostrare che:

$$P\left(\max_{1\leq i\leq n} f_i > a\right) \leq \frac{2^{|p-2|}}{a^{p-1}} \int_{(\max_{1\leq i\leq n} f_i > a)} f^{p-1} dP.$$

Infatti si ha che passando al limite su n a destra e sinistra, si può applicare il Teorema di convergenza monotona.

Basta osservare che $\{\max_{1\leq i\leq n} f_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di funzioni crescente in n.

Supponiamo che la famiglia di σ-algebre sia crescente. Per il caso decrescente, poiché ci siamo ridotti a dimostrarlo con un numero finito n, basta considerare la successione di σ-algebre $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_{n-1} ... \subseteq \mathcal{B}_1$ e ricondurci al caso crescente.

Per prima cosa mostriamo che:

$$\int_{(\max_{1\leq i\leq n} f_i > a)} (f-a)\underline{p-1}\, dP \geq 0, \quad a > 0.$$

Prendiamo $A_i = \{f_1 \leq a, .., f_{i-1} \leq a, f_i > a\}, i = 1, .., n$. Poiché la successione di σ-algebre è crescente, è facile osservare che $A_i = \{f_i > a\} \cap \{f_k \leq a : 1 \leq k \leq i-1\}$ è un insieme $\mathcal{B}_i$-misurabile. Allora dalla Definizione degli insiemi A_i e dalla proprietà 1.16 otteniamo che:

$$\int_{A_i} (f-a)\underline{p-1}\, dP \geq \int_{A_i} (f-f_i)\underline{p-1}\, dP \overset{1.16}{=} 0.$$

Dal fatto che $\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i = \{\max_{1\leq i\leq n} f_i > a\}$ e che gli insiemi A_i sono a due a due disgiunti otteniamo la proprietà voluta.

Supponiamo $p \geq 2$:

Utilizzando il punto 1 del Lemma 2.13 a x=$f(\omega)$ otteniamo:

$a^{p-1} + 2^{p-2} \cdot (f(\omega) - a)^{p-1} \leq 2^{p-2} \cdot f(\omega)\underline{p-1}$,

e dividendo ambo i membri per a^{p-1} e integrando sull'insieme $\{\max_{1\leq i\leq n} f_i > a\}$:

$$P\left(\max_{1\leq i\leq n} \pi_{\mathcal{B}_n}(f) > a\right) + \underbrace{\frac{2^{p-2}}{a^{p-1}} \cdot \int (f(\omega)-a)\underline{p-1}\, dP}_{\geq 0} \leq \frac{2^{|p-2|}}{a^{s-1}} \int f(\omega)\underline{p-1}\, dP,$$

da cui la tesi.

Il caso $1 < p < 2$ è analogo e si sfrutta la disguaglianza 2 del Lemma 2.13.

$\square$

Il Lemma seguente ci permette di passare dalla disuguaglianza massimale debole alla disuguaglianza massimale forte.

Lemma 2.15. *Siano X, Y due v.a. non negative dotate di momento di ordine p e tali che per ogni $\lambda > 0$ si abbia:*

$$P(X > \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \int_{\{X>\lambda\}} Y dP,$$

allora per ogni p: 1<p<∞ si ha che

$$E[X^p] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \cdot E[Y^p].$$

Dimostrazione. Sappiamo che vale: $E[X] = \int_0^\infty P(X > \lambda)d\lambda$, dunque si ha anche che: $E[X^p] = \int_0^\infty P(X > \lambda^{\frac{1}{p}})d\lambda$. Facendo un cambio di variabile $u = \lambda^{\frac{1}{p}}$ ottengo:

$$\begin{aligned} E[X^p] &= \int_0^{+\infty} p \cdot u^{p-1} P(X > u)du \le \int_0^{+\infty} p \cdot u^{p-2} \left(\int_{\{X>u\}} Y dP\right) du \\ &= \int_0^{+\infty} Y \left(\int_0^X p \cdot u^{p-2} du\right) dP = \int_0^{+\infty} Y \cdot (p/p-1) \cdot X^{p-1} dP, \end{aligned}$$

quindi:

$$E[X^p] \le (p/p-1) \cdot E[YX^{p-1}] \overset{Hölder}{\le} (p/p-1) \cdot E[Y^p]^{1/p} \cdot E[X^p]^{1/q},$$

da cui dividendo ambo i membri per $E[X^p]^{1/q}$ ed elevando alla p otteniamo la tesi.

□

Osservazione 2.16. Per i prossimi enunciati utilizzeremo la notazione più estesa $\pi_{\mathcal{B},p}(f)$ per chiarire il fatto che stiamo facendo la p-mediana di f nonostante $f \in L^r$, con $r \ne p$.

Corollario 2.17. *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità, 1<p<∞ e r>p-1. Sia $\mathcal{B}_n$ una sequenza monotona di σ-algebre. Allora per ogni $f \in L^r$ abbiamo che:*

$$\int \sup_{n\in\mathbb{N}} |\pi_{\mathcal{B}_n,p}(f)|^r dP \le u_{r,p} \int |f|^r dP,$$

dove $u_{r,p} = (2^{|p-2|} \cdot [r/(r-p+1)])^{\frac{r}{p-1}}$.

Dimostrazione. Proviamo la tesi per $f \ge 0$: Utilizziamo il Lemma 2.15: Se vale:

$$P(X > \lambda) \le 1/\lambda \cdot \int_{\{X>\lambda\}} Y dP, \;\; \lambda > 0,$$

allora:

$$E[X^\alpha] \le \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^\alpha \cdot E[Y^\alpha], \;\; \alpha > 1.$$

Prendendo $X = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\pi_{\mathcal{B}_n,p}(f))^{p-1}$, $Y = 2^{|p-2|}X^{p-1}$, $\lambda = a^{p-1}$ e $\alpha = r/(p-1) > 1$, osserviamo che con queste scelte il Teorema 2.14 garantisce l'ipotesi del Lemma 2.15, da cui si ottiene la tesi per $f \geq 0$. Osserviamo che per f qualsiasi abbiamo comunque la tesi, infatti:

$$\int \sup_{n\in\mathbb{N}} |\pi_{\mathcal{B}_n,p}(f)|^r \leq \int \sup_{n\in\mathbb{N}} \pi_{\mathcal{B}_n,p}(|f|^r) \leq u_{r,s} \int |f|^r dP.$$

□

Corollario 2.18. *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità, sia $1<p<\infty$ e $r > p-1$. Sia $\{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di σ-algebre monotone contenute in $\mathcal{A}$ con limite $\mathcal{B}_\infty$. Allora per ogni $f \in L^r$ abbiamo che:*

$$\|\pi_{\mathcal{B}_n,p}(f) - \pi_{\mathcal{B}_\infty,p}(f)\|_r \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Osservazione 2.19. L'enunciato precedente ci garantisce convergenza in L^r per ogni $r \geq p-1$, dunque è più forte del Teorema 2.6.

Dimostrazione. Per la dimostrazione di questo corollario utilizziamo un risultato più forte del Teorema 2.10. Chiediamo solo che $f \in L^{p-1}$ invece di $f \in L^p$.

Dalla stima del corollario 2.17 e dal Teorema di Lebesgue convergenza dominata otteniamo la tesi.

□

Osservazione 2.20. Il Corollario precedente si può dimostrare anche per il caso $r = p-1$, usando il concetto di uniforme integrabilità.

Capitolo 3

Casi speciali

In questo capitolo studiamo il caso $p = \infty$ e il caso $p = 2$. Anche il caso $p = 1$ è particolare, ma non lo studiamo.

3.1 Caso p=∞.

Vogliamo estendere la Definizione di *p-mediana* per il caso $p = \infty$.

Sia $L^\infty(\mathcal{A})$. Equivalentemente alla Definizione 1.1, definiamo $\pi_\mathcal{B}$ prendendo $L^\infty(\mathcal{B})$ chiuso e contenuto in $L^\infty(\mathcal{A})$.

Osservazione 3.1. Nel caso $p = \infty$ non ha senso il Lemma 1.3.

Proposizione 3.2. *Sia lo spazio $L^\infty(\mathcal{A})$ e sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ una sotto σ-algebra. Allora per ogni $f \in L^\infty(\mathcal{A})$ esiste $\pi_\mathcal{B}(f) \in L^\infty(\mathcal{B})$ con le due proprietà:*

- $\pi_\mathcal{B}(f) \in L^\infty(\mathcal{B})$ *per ogni* $f \in L^\infty(\mathcal{A})$,
- $\|\pi_\mathcal{B}(f) - f\|_\infty = \inf\{\|f - h\|_\infty : h \in L^\infty(\mathcal{B})\}$.

Chiamiamo una tale $\pi_\mathcal{B}(f)$ ∞-mediana di f rispetto la σ-algebra $\mathcal{B}$.

La dimostrazione della Proposizione precedente sarà una conseguenza dei teoremi successivi.

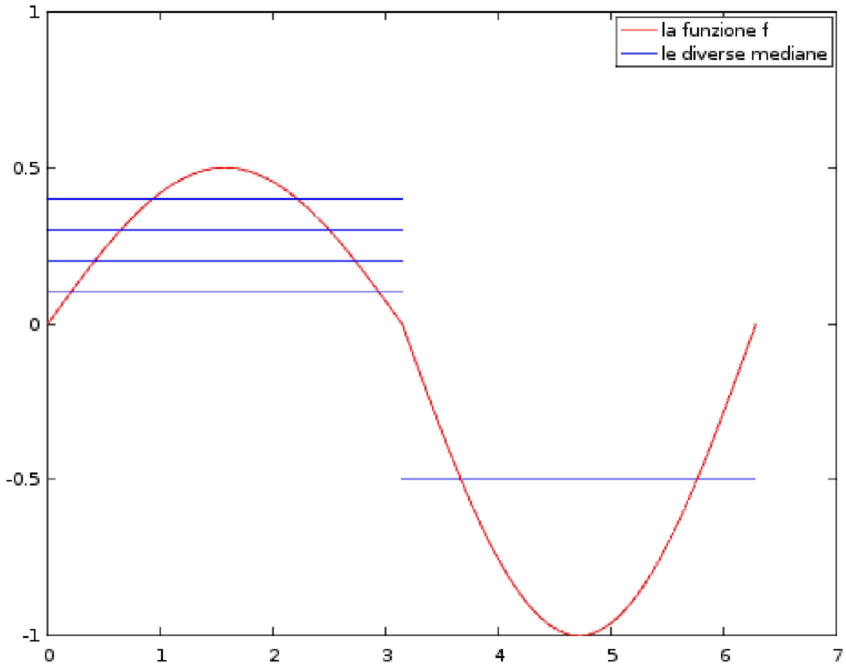
Esempio 3.3. Facili esempi mostrano che $\pi_\mathcal{B}(f)$ può non essere unico. Infatti basta considerare $\mathcal{A}$ i boreliani e $\mathcal{B}$ la σ-algebra generata da $\{[0, \pi)\}$ e sia:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \sin(x) & x : 0 \leq x < \pi, \\ \sin(x) & x : \pi \leq x \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

È facile dimostrare che:

$$f_{\infty,a}(x) = \begin{cases} a & x : 0 \leq x < \pi, \\ -1/2 & x : \pi \leq x \leq 2 \cdot \pi, \end{cases}$$

è una p-mediana per ogni $a : 1/2 \leq a \leq 0$.



;

Figura 3.1: In rosso è graficata la funzione f e in blu troviamo 4 diverse ∞-mediane, in particolare $f_{\infty,a}$, con $a = 1/10, 1/5, 3/10, 2/5$.

Definizione 3.4. Definiamo *l'insieme delle ∞-mediane di f rispetto la σ-algebra $\mathcal{B}$*: $\Pi_{\mathcal{B},\infty}(f)$=$\{g \in L^\infty(\mathcal{B}) | g$ è una ∞-mediana di $f\}$.

Definizione 3.5. Definiamo:

- $ess \inf(f) = \sup\{b \in \mathbb{R} : P(\{\omega \in \Omega : f(\omega) < b\}) = 0\}$,
- $ess \sup(f) = \inf\{b \in \mathbb{R} : P(\{\omega \in \Omega : f(\omega) > b\}) = 0\}$.

Vogliamo studiare il caso p=∞ come limite sui p $\to \infty$. Lo faremo distinguendo il caso più semplice di proiettare f sullo spazio $L^p(\mathcal{B})$ con $\mathcal{B}$ la σ-algebra banale, per poi passare al caso generale di $\mathcal{B}$ σ-algebra qualsiasi.

3.1.1 σ-algebra banale

Ci chiediamo se valgono le seguenti proprietà:

1. $\pi_{\mathcal{B}}(f)$=$\dfrac{ess \inf(f) + ess \sup(f)}{2}$,

2. $\lim_{p\to\infty} \pi_{\mathcal{B},p}(f) = \pi_{\mathcal{B},\infty}(f)$.

Teorema 3.6. *Sia $\mathcal{B}$ la σ-algebra banale e sia $f \in L^\infty(\mathcal{A})$, allora* $\pi_{\mathcal{B}}(f) = \dfrac{ess\sup(f) + ess\inf(f)}{2}$*, ed è unico.*

Dimostrazione. Devo verificare che $\|f - g\|_\infty \leq \|f - a\|_\infty$, per ogni a $\in \mathbb{R}$ dove $g = \dfrac{ess\sup(f) + ess\inf(f)}{2}$.

Osserviamo che g è una funzione costante, poiché $\mathcal{B}$ è la σ-algebra banale.

Dunque ci basta dimostrare che se $b \in \mathbb{R}$ e $b \neq g$ allora b non può essere una $\infty-$mediana.

Supponiamo $b > g$:

prendiamo $\varepsilon > 0$ tale che $b = g+\varepsilon$. Dalla Definizione di $ess\inf f$ abbiamo che esiste $A_\varepsilon = \{\omega \in \Omega : f(\omega) < ess\inf f + \frac{\varepsilon}{2}\}$ ed è tale che $\mathrm{P}(A_\varepsilon) > 0$.

Allora per ogni $\omega \in A_\varepsilon$ si ha che $f(\omega) < g(\omega) < b$. Dunque su A_ε vale che:

$$\begin{aligned}\|f - b\|_\infty &\geq |f(\omega) - b| \\ &> \left|\frac{ess\sup(f) + ess\inf(f)}{2} - ess\inf f\right| = ||f - g||_\infty.\end{aligned}$$

Quindi un numero reale $b > g$ non può essere una $\infty-$mediana.

Se $b < g$:

in questo caso definiamo $A_\varepsilon = \{\omega \in \Omega : f(\omega) > ess\sup f - \frac{\varepsilon}{2}\}$ e per la Definizione di $ess\sup(f)$, si ha che $\mathrm{P}(A_\varepsilon) > 0$. Con piccole modifiche del caso precedente otteniamo la tesi.

Osserviamo che, indirettamente, abbiamo dimostrato anche l'unicità.

□

Un noto risultato sulle norme mostra che:

Lemma 3.7. *Per ogni $f \in L^\infty(\mathcal{A})$ abbiamo che* $\|f\|_p \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$.

Dimostrazione. Usando Hölder otteniamo che, per ogni $1 < p < q < +\infty$:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \leq \|f\|_\infty;$$

Quindi $\{\|f\|_p\}_{p\geq 1}$ è una successione crescente limitata, quindi ha limite. Vediamo adesso che il limite è proprio $\|f\|_\infty$.

Per Definizione di $\|f\|_\infty$ per ogni $\varepsilon > 0$, l'evento $A_\varepsilon = \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ è tale che $P(A_\varepsilon) \geq \delta(\varepsilon) > 0$.

e valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\|f\|_p \geq \left(\int_{A_\varepsilon} f^p dP\right)^{1/p} \geq \left(\int_{A_\varepsilon} (\|f\|_\infty - \varepsilon) dP\right)^{1/p} \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \cdot \delta(\varepsilon)^{1/p}.$$

Facendo il limite su $p \to +\infty$ otteniamo che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$, che è la tesi.

$\square$

Nel caso particolare della σ-algebra banale vale anche la seconda proprietà che stavamo studiando:

Teorema 3.8. *Se $f \in L^\infty(\mathcal{A})$, allora vale che:* $\lim_{p\to+\infty} \pi_{\mathcal{B},p}(f) = \pi_{\mathcal{B},\infty}(f)$.

Dimostrazione. Poichè $\mathcal{B}$ è la σ-algebra banale, $\{\pi_{\mathcal{B},p}(f)\}_{p\geq 1}$ è una successione di numeri reali. Inoltre vale che: $\|\pi_{\mathcal{B},p}(f)\|_p \leq \|f\|_p \to \|f\|_\infty$.

Quindi la successione è limitata. Si può dunque estrarre una sottosuccessione convergente: $\pi_{\mathcal{B},p_n}(f) \to a$, con $a \in \mathbb{R}$.

Si ottiene, per Definizione di p-mediana: $\forall h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \|h - f\|_{p_n} &\geq \|\pi_{\mathcal{B},p_n}(f) - f\|_{p_n} \\ &\geq \|\pi_{\mathcal{B},p_n}(f) - a + a - f\|_{p_n} \\ &\geq -\|a - \pi_{\mathcal{B},p_n}(f)\|_{p_n} + \|a - f\|_{p_n}. \end{aligned}$$

Passando il limite su $n \to \infty$ a destra e sinistra della catena di disuguaglianze e tenendo conto che:

- $|a - \pi_{\mathcal{B},p_n}(f)| \to 0$,
- $\|a - f\|_{p_n} \to \|a - f\|_\infty$, per il Lemma 3.7.

Otteniamo che:

$$\|h - f\|_\infty \geq \|a - f\|_\infty, \ \ \forall h \in \mathbb{R}.$$

Da cui $a = \pi_{\mathcal{B},\infty}(f)$. Inoltre a è proprio il limite di tutta la successione: $\pi_{\mathcal{B},p}(f) \xrightarrow{p\to\infty} a$. Altrimenti esiste una sottosuccessione che converge ad un altro numero reale $b \in \mathbb{R}$ che però soddisferebbe anch'esso le proprietà di ∞-mediana per il discorso precedente; dal Teorema 3.6 sappiamo che $\pi_{\mathcal{B},\infty}(f)$ è unica. Quindi $a = b = \pi_{\mathcal{B},\infty}(f)$.

$\square$

3.1.2 σ-algebra qualsiasi

Diamo delle definizioni preliminari:

Definizione 3.9. Sia $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $L^\infty(\mathcal{A})$, si dice che g_n converge in senso debole $*$ (con notazione $\sigma - (L^\infty, L^1)$) a $g \in L^\infty(\mathcal{A})$ se per ogni $h \in L^1(\mathcal{A})$ si ha $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n \cdot h \, dP = \int_\Omega g \cdot h \, dP$.

Enunciamo un Teorema noto:

Teorema 3.10. *Se $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty(\mathcal{A})$ è limitata in L^∞ allora esiste una sottosuccessione $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che converge, nel senso debole $*$, ad una funzione $g \in L^\infty(\mathcal{A})$.*

Dimostrazione. Segue dal Teorema di Banach-Alaoglu. $\square$

Lemma 3.11 (Lemma di semicontinuità inferiore)**.** *Se $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty(\mathcal{A})$ e tale che esiste $g \in L^\infty(\mathcal{A})$ $g_n \to g$ in senso debole $*$ e sia $\{p_n\}_n$ una qualsiasi successione tale che $p_n \to \infty$, allora $\|g\|_\infty \leq \liminf_{n\to\infty} \|g_n\|_{p_n}$.*

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{A}$ allora:

$$\begin{aligned}\left|\int_A g\, dP\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\int_\Omega g_n \cdot \mathbb{1}_A\, dP\right| \\ &\overset{Holder}{\leq} \liminf_{n\to\infty}\left(\int |g_n|^{p_n}\right)^{1/p_n} \cdot P(A)^{1/q_n} \\ &= P(A)\cdot \liminf_{n\to\infty} \|g_n\|_{p_n}.\end{aligned}$$

Da cui ponendo $L = \liminf_{n\to\infty} \|g_n\|_{p_n}$ e scegliendo come insieme $A \in \mathcal{A} : A = \{g > L\}$, si ha che la disuguaglianza precedente è vera se e solo se $P(A) = 0$, ovvero $ess\sup(g) \leq L$.

Similmente, prendendo l'insieme $B = \{g < -L\}$, si conclude che $ess\inf(g) \geq -L$.

$\square$

Teorema 3.12. *Sia $f \in L^\infty(\mathcal{A})$ e sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ una sotto σ-algebra. Sia inoltre $(\pi_{\mathcal{B},p}(f))_{p>1}$ la successione di p-mediane di f, allora:*

1. *esiste una sottosuccessione $(p_n)_n$ ed esiste $f_\infty \in L^\infty(\mathcal{B})$ tale che $\pi_{\mathcal{B},p_n}(f) \to f_\infty$ in senso debole $*$;*
2. *f_∞ verifica le due proprietà di ∞-mediana, ovvero $f_\infty \in \Pi_{\mathcal{B},\infty}(f)$,*
3. *inoltre, per ogni $A \in \mathcal{B}$ si ha che $\mathbb{1}_A \cdot f_\infty \in \Pi_{\mathcal{B},\infty}(\mathbb{1}_A \cdot f)$.*

Dimostrazione. 1.) è una conseguenza del Teorema 3.10, osservando che $|\pi_{\mathcal{B},p}(f)| \leq 2 \cdot \|f\|_\infty$ (si veda la Proposizione 1.5).

2.) Dalla Definizione di p-mediana si ha che per ogni $h \in L^\infty(\mathcal{B})$ si ha che: $\|\pi_{\mathcal{B},p_n}(f) - f\|_{p_n} \leq \|h - f\|_{p_n}$.

Applicando il Lemma 3.11 con $g_n = \pi_{\mathcal{B},p_n}(f) - f$ che converge debole $*$ a $f_\infty - f$ e tenendo conto della disuguaglianza precedente si ottiene:

$$\|f - f_\infty\|_\infty \overset{3.11}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \|\pi_{\mathcal{B},p_n}(f) - f\|_{p_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \|h - f\|_{p_n} \overset{3.7}{=} \|h - f\|_\infty.$$

Da cui la tesi per arbitrarietà di $h \in L^\infty(\mathcal{B})$.

3.) Infatti: $\pi_{\mathcal{B},p_n}(f \cdot \mathbb{1}_A) \overset{1.10}{=} \pi_{\mathcal{B},p_n}(f) \cdot \mathbb{1}_A \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_\infty \cdot \mathbb{1}_A$, dove la convergenza è in senso debole $*$. Otteniamo dunque:

$$\|\mathbb{1}_A \cdot f - \mathbb{1}_A \cdot f_\infty\|_\infty \overset{3.11}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \|\mathbb{1}_A \cdot \pi_{\mathcal{B},p_n}(f) - \mathbb{1}_A \cdot f\|_{p_n}$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \|\mathbb{1}_A \cdot h - \mathbb{1}_A \cdot f\|_{p_n} \overset{3.7}{=} \|h - f\|_\infty.$$

Quindi si ha che $f_\infty \cdot \mathbb{1}_A \in \Pi_{\mathcal{B},\infty}(\mathbb{1}_A \cdot f)$.

□

Osservazione 3.13. Vorremo definire il $\mathcal{B} - \sup(f)$, estendendo la Definizione 3.5 a σ-algebre qualsiasi. L'idea più intuitiva è di definirlo come:

$\mathcal{B} - \sup(f) = \inf\{g \in L^\infty(\mathcal{B}) : g \geq f\ q.o.\}$, ma il problema è che questo comprometterebbe la $\mathcal{B}$-misurabilità del $\mathcal{B} - \sup(f)$, perchè l'inf è fatto su una famiglia più che numerabile.

Chiamiamo *insieme dei maggioranti di* f $\mathcal{M}(f) = \{g \in L^\infty(\mathcal{B}) : g \geq f\ P\text{-}q.c.\}$.

Consideriamo dunque le misure: $(\mu_i)_{i\in I} = (g_i \cdot P)_{i\in I}$ (intendiamo che $\mu(A) = \int_A g_i dP$) al variare di $g_i \in \mathcal{M}(f)$. Poi si costruisce:

$$\mu(A) = \left(\inf_{g\in\mathcal{M}(f)} (g \cdot P)\right)(A) = \inf_{n\geq 1, i(k)\in I} \left\{\sum_{k=1}^n \mu_{i(k)}(A_k) : \bigcup_{k=1}^n A_k = A, A_k \in \mathcal{B}\right\}.$$

Dalla Definizione della misura μ si deduce che è assolutamente continua ($\mu \ll P$), poichè inf di misure assolutamente continue rispetto P. Quindi dal Teorema di Radon-Nikodym si deduce che esiste una funzione densità $\mathcal{B}$-misurabile.

Definizione 3.14. Definiamo $\mathcal{B} - \sup(f) = \dfrac{d\mu}{dP}$, la funzione densità della costruzione precedente.

Proposizione 3.15. *Le proprietà che usiamo su* $\mathcal{B} - \sup(f)$ *sono le seguenti:*

1. $\mathcal{B} - \sup(f) \in L^\infty(\mathcal{B})$ *e* $\mathcal{B} - \sup(f) \geq f$,

2. *per ogni* g $L^\infty(\mathcal{B})$ *tale che* $f \leq g$, *allora* $\mathcal{B} - \sup(f) \leq g$ *P-q.c..*

Le due proprietà seguono dalla costruzione di $\mathcal{B} - \sup(f)$, manon le dimostriamo.

Proposizione 3.16. *Se* $A \in \mathcal{B}$, *allora* $\mathcal{B} - \sup(\mathbb{1}_A \cdot f) = \mathbb{1}_A \cdot \mathcal{B} - \sup(f)$.

Dimostrazione. $\leq$) $f \cdot \mathbb{1}_A \leq f$, quindi dalla proprietà 2. della Proposizione 3.15 segue che $\mathcal{B} - \sup(f \cdot \mathbb{1}_A) \leq \mathcal{B} - \sup(f)$. Inoltre dalla proprietà 1. della Proposizione 3.15 otteniamo che $\mathcal{B} - \sup(|f \cdot \mathbb{1}_A|) \geq |f \cdot \mathbb{1}_A| = 0$ P-q.c. in A^c e quindi $\mathcal{B} - \sup(f \cdot \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{1}_A \cdot \mathcal{B} - \sup(f)$;

$\geq$) Prendiamo una generica $g \in L^\infty(\mathcal{B})$ tale che $g \geq f \cdot \mathbb{1}_A$, allora chiamiamo: $g' = g \cdot \mathbb{1}_A + \|f\|_\infty \cdot \mathbb{1}_{A^c}$;

$$g' \geq f \Longrightarrow g' \geq \mathcal{B} - \sup(f),$$

e moltiplicando per $\mathbb{1}_A$ ambo i membri $\mathbb{1}_A \cdot g \geq \mathbb{1}_A \cdot \mathcal{B} - \sup(f)$, quindi $g \geq \mathbb{1}_A \cdot \mathcal{B} - \sup(f)$, da cui la tesi per arbitrarietà di $g \in L^\infty(\mathcal{B})$.

Infatti se non valesse la disuguaglianza voluta, avremmo:

$$\mathcal{B} - \sup(\mathbb{1}_A \cdot f) < \mathbb{1}_A \cdot \mathcal{B} - \sup(f) \leq g,$$

su di un insieme di misura strettamente positiva, che è assurdo perchè possiamo scegliere $g = \mathcal{B} - \sup(\mathbb{1}_A \cdot f)$.

□

Proposizione 3.17. $\mathcal{B} - \sup(f)$ *è unico, a meno di P-misura nulla.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che ne esistano due: $g_1, g_2 \in L^\infty(\mathcal{B})$ tali che $g_1, g_2 \geq f$ P-q.c..

Non è difficile dimostrare che $\min\{g_1, g_2\} \in L^\infty(\mathcal{B})$ e vale che $\min\{g_1, g_2\} \geq f$ P-q.c.. Allora per la Proposizione 3.15, poichè $\min\{g_1, g_2\} \in L^\infty(\mathcal{B})$, si ha: $g_1, g_2 \leq \min\{g_1, g_2\}$ P-q.c., che è la tesi.

□

Definizione 3.18. $\mathcal{B} - \inf(f) = -\mathcal{B} - \sup(-f)$.

Osservazione 3.19. Dunque molte proprietà di $\mathcal{B} - \sup(f)$ si estendono anche a $\mathcal{B} - \inf(f)$, facendo attenzione a segni e diseguaglianze a volte invertite.

Proposizione 3.20. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Se* $\mathcal{B} - \sup(f) > \lambda$ $\lambda \in \mathbb{R}$ *su di un insieme* $A \in \mathcal{B} : P(A) > 0$, *allora* $f > \lambda$ *su* A,

2. *Se* $\mathcal{B} - \sup(f) \leq \lambda$ *su* $A \in \mathcal{B}$, *allora* $f \leq \lambda$ *su* A *P-q.c.*,

3. *Se* $\mathcal{B} - \inf(f) \geq \lambda$ *su* $A \in \mathcal{B}$, *allora* $f \geq \lambda$ *su* A *P-q.c.*,

4. *Se* $\mathcal{B} - \inf(f) < \lambda$ $\lambda \in \mathbb{R}$ *su di un insieme* $A \in \mathcal{B} : P(A) > 0$, *allora* $f < \lambda$ *su* A.

Dimostrazione. Osserviamo che 1. è conseguenza della Proposizione 3.15.

Proviamo 2.) Per ipotesi abbiamo che: $\mathbb{1}_A \cdot (\mathcal{B} - \sup(f)) \leq \lambda \cdot \mathbb{1}_A$, P-q.c.. Inoltre vale che:

$$\mathbb{1}_A \cdot (\mathcal{B} - \sup(f)) \overset{3.16}{=} \mathcal{B} - \sup(\mathbb{1}_A \cdot f) \overset{3.15}{\geq} f \cdot \mathbb{1}_A,$$

P-q.c., da cui la tesi.

Le verifiche di 3. e 4. sono equivalenti alla 1. e 2. .

$\square$

Lemma 3.21. *Siano $\lambda_1 \leq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon > 0$, poniamo:*

$A^{\varepsilon}_{\lambda_1,\lambda_2} = \{\omega \in \Omega : \mathcal{B} - \sup(f) \in (\lambda_2, \lambda_2 + \varepsilon]$ *e* $\mathcal{B} - \inf(f) \in [\lambda_1, \lambda_1 + \varepsilon)\}$.

Allora per ogni $g \in L^\infty(\mathcal{B})$ che soddisfa $g \cdot \mathbb{1}_{A^{\varepsilon}_{\lambda_1,\lambda_2}} \in \Pi_{\mathcal{B},\infty}(f \cdot \mathbb{1}_{A^{\varepsilon}_{\lambda_1,\lambda_2}})$ si ha che $g \in \left[\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} - 2 \cdot \varepsilon, \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} + 2 \cdot \varepsilon\right]$ P-q.c. in $A^{\varepsilon}_{\lambda_1,\lambda_2}$.

Dimostrazione. Per semplicità, in questa dimostrazione chiamiamo A l'insieme $A^{\varepsilon}_{\lambda_1,\lambda_2}$.

Se $P(A) = 0$ non c'è nulla da dimostrare, altrimenti:

Proviamo che $g \leq \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} + 2 \cdot \varepsilon$ P-q.c. su A.

Ragionando per assurdo esiste un evento $B \subseteq A : P(B) > 0$ e $g > \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} + 2 \cdot \varepsilon$.

Per ipotesi abbiamo che: $\|\mathbb{1}_A \cdot f - \mathbb{1}_A \cdot g\|_\infty \leq \|\mathbb{1}_A \cdot f - \mathbb{1}_A \cdot h\|_\infty$, per ogni $h \in L^\infty(\mathcal{B})$.

Poniamo $h = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$. Usando la Proposizione precedente otteniamo che per quasi ogni $\omega \in A$, (osservando che $A \in \mathcal{B}$):

- $f - h \leq \lambda_2 + \varepsilon - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2} + \varepsilon,$
- $f - h \geq \lambda_1 - \varepsilon - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} - \varepsilon.$

Quindi unendo le due disuguaglianze otteniamo che: $||\mathbb{1}_A \cdot f - \mathbb{1}_A \cdot h||_\infty \leq \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2} + \varepsilon$, sull'insieme A.

Inoltre vale che per ogni $\omega \in B$ si ha che $g - f > \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} + 2 \cdot \varepsilon - \lambda_1 = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2} + 2 \cdot \varepsilon$.

Da cui $\|\mathbb{1}_A \cdot g - \mathbb{1}_A \cdot f\|_\infty > \|\mathbb{1}_A \cdot h - \mathbb{1}_A \cdot f\|_\infty$, che è assurdo.

In modo equivalente si mostra che $g \geq \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} - 2 \cdot \varepsilon$.

$\square$

Corollario 3.22. *Per ogni $g \in L^\infty(\mathcal{B})$ che soddisfa $g \cdot \mathbb{1}_A \in \Pi_{\mathcal{B},\infty}(f \cdot \mathbb{1}_A)$ per ogni $A \in \mathcal{B}$, si ha che $g \in \left[\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} - 2\cdot\varepsilon, \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} + 2\cdot\varepsilon\right]$ P-q.c. in $A^\varepsilon_{\lambda_1,\lambda_2}$, definito sopra.*

Teorema 3.23. *Per ogni $g \in L^\infty(\mathcal{B})$ che soddisfa $g \cdot \mathbb{1}_A \in \Pi_{\mathcal{B},\infty}(f \cdot \mathbb{1}_A)$, per ogni $A \in \mathcal{B}$, allora $g = \frac{\mathcal{B}-\sup(f)+\mathcal{B}-\inf(f)}{2}$ P-q.c.. Quindi in particolare è unica.*

Dimostrazione. Dal Lemma precedente, per quasi ogni $\omega \in A^\varepsilon_{\lambda_1,\lambda_2}$, definito precedentemente, si ha che:

$$
\begin{aligned}
&\left|g - \frac{\mathcal{B}-\sup(f)+\mathcal{B}-\inf(f)}{2}\right| \\
&= \left|g - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} - \frac{\mathcal{B}-\sup(f)+\mathcal{B}-\inf(f)}{2}\right| \\
&\leq 2\cdot\varepsilon + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Inoltre vale che: $\Omega = \bigcup_{\lambda_1 \leq \lambda_2} A^\varepsilon_{\lambda_1,\lambda_2} \cup N$, dove $N = \{\mathcal{B}-\sup(f) < \mathcal{B}-\inf(f)\}$. È facile osservare che $P(N) = 0$. Inoltre prendendo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$, l'unione diventa numerabile.

E poichè la disuguaglianza vale per ogni $\omega \in A^\varepsilon_{\lambda_1,\lambda_2}$, a meno di un misura nulla, allora la disuguaglianza vale su tutto $\Omega \backslash \widetilde{N}$, dove $\widetilde{N}$ ha misura nulla (unione numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla).

Quindi otteniamo la tesi usando la proprietà:

Per ogni $\varepsilon > 0$, $\{|h| > \varepsilon\}$ ha misura nulla, allora $h = 0$ P-q.c. .

□

Corollario 3.24. *Sia $g = \frac{\mathcal{B}-\sup(f)+\mathcal{B}-\inf(f)}{2}$, allora $\mathbb{1}_A \cdot g \in \Pi_{\mathcal{B},\infty}(\mathbb{1}_A \cdot f)$, per ogni $A \in \mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Dalla proprietà 1. e 3. del Teorema 3.12 otteniamo che esiste una funzione g con la proprietà: $\mathbb{1}_A \cdot g \in \Pi_{\mathcal{B},\infty}(\mathbb{1}_A \cdot f)$, per ogni $A \in \mathcal{B}$, quindi dal Teorema precedente la funzione g deve essere proprio $\frac{\mathcal{B}-\sup(f)+\mathcal{B}-\inf(f)}{2}$ P-q.c., da cui la tesi. □

Proposizione 3.25. *Sia $f \in L^\infty(\mathcal{A})$ e sia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ una sotto σ-algebra. Sia inoltre $(\pi_{\mathcal{B},p}(f))_{p>1}$ la successione di p-mediane di f, allora esiste una sottosuccessione $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:*

$$\pi_{\mathcal{B},p_n}(f) \longrightarrow \frac{\mathcal{B}-\sup(f)+\mathcal{B}-\inf(f)}{2},$$

convergente nel senso debole $*$.

Dimostrazione. Dal Teorema 3.12 sapevamo già che esisteva una sottosuccessione convergente in senso debole $*$, e che il limite (chiamato f_∞) vericava: $\mathbb{1}_A \cdot f_\infty \in \Pi_{\mathcal{B},\infty}(\mathbb{1}_A \cdot f)$, per ogni $A \in \mathcal{B}$.

Quindi dal Teorema 3.23 si ha la tesi.

□

Osservazione 3.26. Le palle chiuse e limitate in L^∞ sono metrizzabili con la convergenza debole $*$ (deriva dal Teorema di Banach-Alaoglu).

Quindi si ottiene che tutta la successione converge debole $*$:

$$\pi_{\mathcal{B},p}(f) \longrightarrow \frac{\mathcal{B}-\sup(f)+\mathcal{B}-\inf(f)}{2}.$$

3.2 Caso p=2

Consideriamo $L^2(\mathcal{A})$ e l'applicazione:

$$\pi_{\mathcal{B}}\colon\ L^2(\mathcal{A}) \to L^2(\mathcal{B}),$$

dove $\mathcal{B}$ è una σ-algebra contenuta in $\mathcal{A}$.

In questo caso particolare abbiamo già dimostrato che la Definizione di speranza condizionale e 2-mediana coincidono (Teorema 1.16). Dunque la 2-mediana verifica tutte le proprietà della Proposizione 1.13.

Dai teoremi di convergenza del capitolo 2, abbiamo visto che per definire la 2-mediana basta che $f \in L^1$.

Si osserva dunque un parallelismo con la Definizione di martingala, in cui però non si fa riferimento ad una funzione $f \in L^2$.

Definizione 3.27. Sia $\{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di σ-algebre crescenti. Chiamiamo $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ martingala, una successione di funzioni che verifica le seguenti proprietà:

- M_n è $\mathcal{B}_n$ misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}$,
- $M_n \in L^1(\mathcal{B}_n)$,
- $E[M_n|\mathcal{B}_m] = M_m$ per ogni $m < n$.

La domanda che ci poniamo è: esiste una funzione $f \in L^1(\mathcal{A})$ tale che $M_n = \pi_{\mathcal{B}_n}(f)$?

Diamo l'enunciato di due risultati classici sulle martingale:

Teorema 3.28. *Sia $(M_n)_n$ una martingala, se vale che $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_n\|_1 < +\infty$. Allora esiste $f \in L^1(\mathcal{A})$ tale che $M_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ q.c.*

Teorema 3.29. *Sia $(M_n)_n$ una martingala, se vale che $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_n\|_r < +\infty$, con $r > 1$. Allora esiste $f \in L^1(\mathcal{A})$ tale che $M_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ in L^r.*

Per una dimostrazione completa di questi teoremi standard si veda [Wil91].

Osservazione 3.30. Osserviamo che nel caso $p = 2$ valgono le due proprietà di base studiate nella sezione 1.4 per l'estensione della p-mediana per funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$.

Osserviamo che nel caso p=2, c'è una relazione tra la disuguaglianza massimale e la convergenza quasi certa delle 2-mediane. Infatti:

Proposizione 3.31. *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *uno spazio di probabilità e* $f \in L^1(\mathcal{A})$, *e sia* $\{\mathcal{B}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di* σ*-algebre crescenti, tendenti a* $\mathcal{B}_\infty$. *Se vale la disuguaglianza massimale sulle 2-mediane* $\pi_{\mathcal{B}_n}(f)$, *allora vale la convergenza q.c.:* $\pi_{\mathcal{B}_n}(f) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi_{\mathcal{B}_\infty}(f)$.

Dimostrazione. Se $f \in L^1(\mathcal{B}_{N_0})$ per qualche $N_0 \in \mathbb{N}$, allora la tesi è ovvia poichè la successione si stabilizza dopo N_0 e diventa uguale a f q.o..

Dal Lemma 2.4 abbiamo dunque la convergenza q.c. su un sottospazio denso di $L^1(\mathcal{B}_\infty)$.

Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo che:

$$P(\limsup_{n\to\infty} |\pi_{\mathcal{B}_n}(f) - \pi_{\mathcal{B}_\infty}(f)| > \varepsilon) = P(\limsup_{n\to\infty} |\pi_{\mathcal{B}_n}(f) - g + g - \pi_{\mathcal{B}_\infty}(f)| > \varepsilon)$$
$$\leq P(\limsup_{n\to\infty} |\pi_{\mathcal{B}_n}(f) - g| > \varepsilon/2) + P(\limsup_{n\to\infty} |g - f| > \varepsilon/2),$$

Scegliendo $g \in L^1(\mathcal{B}_{N_0})$, per qualche $N_0 \in \mathbb{N}$ abbastanza grande tale che $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon^2$ otteniamo che (applicando il corollario 2.17):

- $P\left(\limsup_{n\to\infty} |\pi_{\mathcal{B}_n}(f) - g| > \varepsilon/2\right) \leq \dfrac{cost.}{\varepsilon} \cdot E[|f - g|] \leq cost. \cdot \varepsilon$, tenendo conto che la 2-mediana è lineare e vale che:

  $\pi_{\mathcal{B}_n}(f) - g = \pi_{\mathcal{B}_n}(f - g) \quad \text{e} \quad E[|\pi_{\mathcal{B}_n}(f - g)|] \leq E[|f - g|]$,
- $P(\limsup_{n\to\infty} |g - f| > \varepsilon/2) \leq cost. \cdot E[|f - g|]/\varepsilon = cost. \cdot \varepsilon$.

Unendo le due disuguaglianze si ottiene la tesi, data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

□

Bibliografia

[AA65] T. Andô and I. Amemiya. Almost everywhere convergence of prediction sequence in L_p $(1 < p < \infty)$. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 4:113–120 (1965), 1965.

[Cla36] James A. Clarkson. Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40(3):396–414, 1936.

[Let13] G. Letta. *Argomenti scelti di teoria della misura.* Quad. dell'Unione Matematica Italiana. Pitagora, 2013.

[LR81] D. Landers and L. Rogge. Isotonic approximation in L_s. *J. Approx. Theory*, 31(3):199–223, 1981.

[Wil91] D. Williams. *Probability with Martingales.* Cambridge University Press, 1991.