



UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea

APPROSSIMAZIONE DI COX-ROSS-RUBINSTEIN
ALLE FORMULE DI BLACK E SCHOLES
ED ALCUNE CONSEGUENZE

Relatore:
Prof. *Maurizio Pratelli*

Studente:
Giulio Benigni

Correlatore:
Dott. *Dario Trevisan*

ANNO ACCADEMICO 2014-2015

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | v |
| 1 Formule di Black e Scholes | 1 |
| 1.1 Modello di Black-Scholes-Merton | 1 |
| 1.2 Equazione di Black-Scholes | 5 |
| 1.3 Formule di Black-Scholes | 7 |
| 2 Modello a tempo discreto | 11 |
| 2.1 Basi del modello | 11 |
| 2.1.1 Attivi finanziari | 11 |
| 2.1.2 Strategie | 12 |
| 2.1.3 Strategie ammissibili e arbitraggio | 13 |
| 2.2 Martingale e opportunità di arbitraggio | 14 |
| 2.3 Mercati completi e valutazione delle opzioni | 18 |
| 2.3.1 Mercati completi | 18 |
| 2.3.2 Valutare e replicare un prodotto derivato in un mercato completo | 20 |
| 3 Modello di Cox-Ross-Rubinstein | 23 |
| 3.1 Descrizione del modello | 23 |
| 3.2 Valutare e replicare un'opzione | 25 |
| 3.2.1 Modello ad un periodo | 25 |
| 3.2.2 Modello multiperiodale | 27 |
| 4 Passaggio al limite | 31 |
| 5 Sperimentazioni numeriche | 39 |
| 5.1 Convergenza lognormale | 39 |
| 5.2 Convergenza metodo Monte Carlo | 42 |
| 5.3 Codice programmi | 45 |
| Bibliografia | 49 |

Introduzione

L'obiettivo principale di questa tesi è introdurre la teoria alla base della valutazione di quei prodotti derivati meglio conosciuti come *opzioni europee*. Prima di dare una definizione formale di opzione europea spieghiamo attraverso un esempio concreto come mai tali contratti finanziari siano di fondamentale importanza.

Consideriamo l'azienda italiana Avio Aero, la quale oggi (denotato da $t = 0$) ha firmato un contratto con l'azienda americana Aerogear. Il contratto stipulato dichiara che Aerogear consegnerà 10000 ingranaggi ad Avio esattamente fra sei mesi (denotato da $t = T$). Inoltre è stipulato che Avio darà 100 dollari statunitensi a Aerogear per ogni ingranaggio alla scadenza del contratto, cioè a $t = T$. Per semplicità assumiamo che ad oggi il tasso di cambio tra l'euro e il dollaro americano è pari a 1.00 €//\$.

Uno dei maggiori problemi con questo contratto, dal punto di vista di Avio, è che ciò implica un notevole rischio di cambio. Dato che Avio non sa quale sarà il valore del tasso di cambio fra sei mesi, questo significa che essa non sa quanti euro dovrà pagare a $t = T$. Se il tasso di cambio rimanesse invariato Avio dovrà pagare 1000000 €, ma se invece salisse a 1.50 a quel punto si troverebbe a dover spendere 1500000 €. Chiaramente Avio, di fronte a tale rischio, cercherà di proteggersi e per fare ciò esistono varie strategie. Una di queste è appunto acquistare un'opzione europea di tipo call.

Definizione 0.1. Un'opzione europea su di un determinato attivo finanziario con prezzo di esercizio K e data di scadenza T è un contratto finanziario scritto al tempo $t = 0$ con le seguenti proprietà

1. Il possessore del contratto, esattamente a $t = T$, ha il diritto di comprare (opzione call) o vendere (opzione put) l'attivo al prezzo K .
2. Il possessore dell'opzione non è obbligato a comprare o vendere l'attivo sottostante.

Opzioni di questo genere sono commercializzate nei mercati a termine e si applicano ai più disparati attivi finanziari, dalle azioni ai titoli a reddito fisso, dalle valute alle merci, e possono essere scritti da chiunque operi sul mercato.

Avio potrebbe quindi comprare un'opzione europea che le dà il diritto di acquistare \$1000000 fra sei mesi al predeterminato tasso di cambio K . Così facendo ha eliminato il rischio di subire un tasso di cambio per lei sfavorevole e allo stesso tempo ha mantenuto la possibilità di sfruttare un tasso di cambio favorevole.

A questo punto però Avio potrebbe chiedersi, qual'è il prezzo corretto (*fair price*) da pagare al tempo $t = 0$ per un tale contratto?

Da questa domanda nasce la mia tesi, vedremo come valutare un'opzione in un mercato privo di arbitraggio e completo. Inizialmente introdurremo il modello di Black-Scholes-Merton ed enunceremo la formula di Black-Scholes per il calcolo del prezzo di un'opzione europea di tipo call. Successivamente analizzeremo il modello a tempi discreti per poi arrivare al modello di Cox-Ross-Rubinstein e alla loro formula. Dimosteremo come quest'ultima, passando al limite, approssima la formula di Black-Scholes. Infine concluderemo con diversi risultati numerici.

Capitolo 1

Formule di Black e Scholes

In questo capitolo introdurremo velocemente alcune delle basi della teoria dei mercati finanziari. Mostriamo il modello di Black-Scholes-Merton e illustreremo le sue principali caratteristiche. Infine enunceremo le formule di Black-Scholes per la valutazione di un'opzione europea.

1.1 Modello di Black-Scholes-Merton

Consideriamo un mercato finanziario costituito da due soli attivi: un attivo privo di rischio ed uno con rischio. Il primo con un valore definito dal processo stocastico B e il secondo dal processo S . Diamo una definizione di attivo privo di rischio.

Definizione 1.1. Un attivo è detto *privo di rischio* se il processo B che ne definisce il valore è soluzione dell'equazione differenziale

$$dB(t) = r(t)B(t)dt$$

dove r è un processo adattato deterministico.

Osserviamo che possiamo riscrivere l'equazione per B come

$$\frac{dB(t)}{dt} = r(t)B(t)$$

quindi il processo B è dato dall'espressione

$$B(t) = B(0) \exp \int_0^t r(s)ds$$

Nel caso particolare in cui r è una costante possiamo interpretare B come il valore di un bond.

Assumiamo poi che il processo S sia dato da

$$dS(t) = S(t)\alpha(t, S(t))dt + S(t)\sigma(t, S(t))d\bar{W}(t)$$

dove \bar{W} è un processo di Wiener e α e σ sono due funzioni deterministiche. La ragione per cui scriviamo \bar{W} , invece del più semplice W , sarà chiarita in seguito. La funzione σ è conosciuta come la *volatilità* di S , mentre α è la *media* di S . In questo caso S può essere visto come il valore di un'azione.

Osservazione 1.2. La differenza principale tra i nostri due attivi sta nel loro tasso di rendimento. Per B formalmente questo è dato da

$$\frac{dB(t)}{B(t) \cdot dt} = r(t)$$

Tale oggetto è deterministico per cui a qualsiasi tempo t noi abbiamo una completa conoscenza del rendimento.

Osserviamo adesso il tasso di rendimento di S

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \alpha(t, S(t))dt + \sigma(t, S(t))d\bar{W}(t)$$

Questo al contrario non è generalmente deterministico. Infatti i termini $\alpha(t, S(t))$ e $\sigma(t, S(t))$ lo sono, ma è anche presente del *rumore* $d\bar{W}(t)$, il quale è aleatorio.

Introduciamo ora il modello di Black-Scholes-Merton.

Definizione 1.3. Il modello di Black-Scholes-Merton (BSM) è costituito da due attivi le cui dinamiche sono date da

$$dB(t) = rB(t)dt \tag{1.1}$$

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)d\bar{W}(t) \tag{1.2}$$

dove r , α e σ sono costanti deterministiche.

Nell'introduzione abbiamo parlato delle opzioni europee. Si intuisce dalla definizione che queste sono legate al valore S dell'attivo sottostante. E proprio per questo fanno parte di una categoria più generale chiamata *prodotti derivati*.

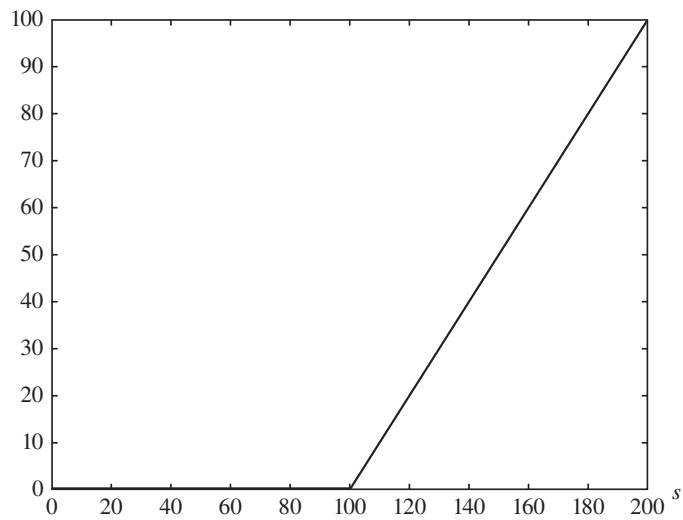
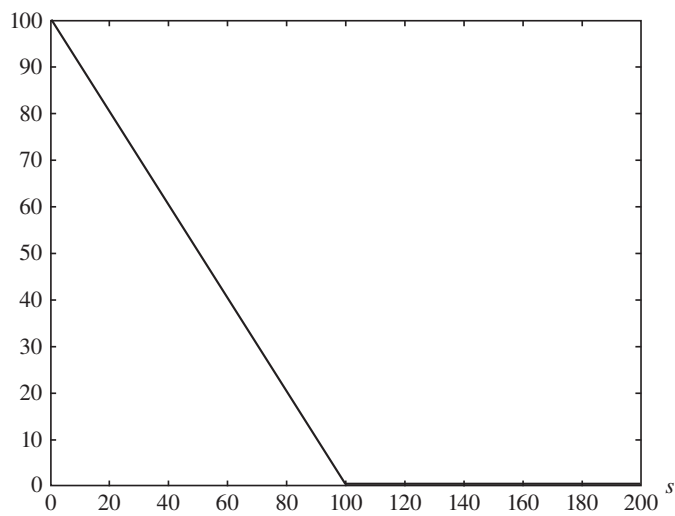
Definizione 1.4. Un *prodotto derivato finanziario*, o più semplicemente *prodotto derivato* o anche solo *derivato*, con scadenza T è una qualsiasi variabile aleatoria h della forma

$$h = f(S(T))$$

dove $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Un modo di interpretare questa definizione è che possiamo vedere un derivato come un contratto. Il quale stipula che il possessore di tale contratto riceverà l'ammontare h al tempo $t = T$. Nel caso di un'opzione europea di tipo call sul nostro attivo con rischio è facile verificare che h è dato da

$$h(S(T)) = \max[0, S(T) - K]$$

Figura 1.1: $h = f(S(T))$. Call europea, $K = 100$ Figura 1.2: $h = f(S(T))$. Put europea, $K = 100$

I grafici sopra riportati mostrano rispettivamente la funzione f di una call europea e di una put europea, entrambe con prezzo di esercizio uguale a 100.

I contratti associati ai prodotti derivati sono venduti sul mercato. Il loro prezzo dipenderà dal tempo t e dal valore $S(t)$ del sottostante. Determinare quale sia il prezzo *giusto* (in un senso che verrà spiegato più avanti) è il nostro obiettivo e per fare ciò

useremo la notazione

$$\Pi(t, h)$$

per indicare il valore del derivato h .

Osservazione 1.5. E' facile verificare che al tempo $t = T$ avremo che

$$\Pi(T, h) = h$$

Introduciamo ora molto brevemente il concetto di portafoglio ed alcune sue caratteristiche, una definizione formale nel caso discreto sarà data nel secondo capitolo. Un portafoglio ϕ è un insieme di attività finanziarie. Nel nostro caso, dato il modello BSM, un portafoglio è costituito da due parametri $\phi_B(t)$ e $\phi_S(t)$. Il primo indica il numero di bond posseduti al tempo t , mentre il secondo il numero di azioni possedute sempre al tempo t . Per cui scriveremo

$$\phi(t) = (\phi_B(t), \phi_S(t))$$

Indicheremo inoltre con $V^\phi(t)$, o semplicemente $V(t)$ quando non ci saranno equivoci, il valore del portafoglio al tempo t .

Col passare del tempo è possibile rivedere la composizione del proprio portafoglio. Diremo che un portafoglio è *autofinanziato* se non vi sono flussi finanziari nè in entrata, nè in uscita, ma ci si limita a reinvestire nel portafoglio quanto maturato dai titoli posseduti.

Enunciamo un lemma che ci sarà utile in seguito, ma prima una piccola definizione.

Definizione 1.6. Dato un portafoglio ϕ il corrispondente *portafoglio relativo* u è definito da

$$u_i(t) = \frac{\phi_i(t)S_i(t)}{V^\phi(t)} \quad \text{per } i = 1, \dots, N$$

dove N è il numero di attivi posseduti. E' facile provare che

$$\sum_{i=1}^N u_i(t) = 1$$

Lemma 1.7. *Un portafoglio è autofinanziato se e solo se*

$$dV^\phi(t) = V^\phi(t) \sum_{i=1}^N u_i(t) \frac{dS_i(t)}{S_i(t)}$$

A questo punto diamo la definizione di arbitraggio.

Definizione 1.8. Una *opportunità di arbitraggio* in un mercato finanziario è un portafoglio autofinanziato ϕ tale che

$$V^\phi(0) = 0$$

e

$$\mathbb{P}(V^\phi(T) \geq 0) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(V^\phi(T) > 0) > 0$$

Diremo che il mercato è *privo di arbitraggio* (N.A., dall'inglese "No Arbitrage") se non è presente alcuna opportunità di arbitraggio.

Un'opportunità di arbitraggio è quindi equivalente alla possibilità di avere un profitto senza esporsi a nessun rischio. Un tale portafoglio dunque può essere visto come una macchina per fare soldi. Nei mercati reali, le possibilità di arbitraggio sono molto rare e comunque solitamente si estinguono in tempi brevi: nel nostro modello di mercato quindi imporremo che non vi siano affatto. A questo punto si può intuire come mai abbiamo parlato di prezzo giusto per un'opzione. Noi cercheremo di valutare il nostro prodotto derivato h in modo da non creare opportunità di arbitraggio nel mercato dato da $(B(t), S(t), \Pi(t, h))$. Fatto sorprendente è che tale proposito non solo è realizzabile, ma siamo anche in grado di fornire una formula chiusa, la formula di Black-Scholes, per il calcolo di tale prezzo. Per arrivare a questo l'idea principale è la seguente: dato che il derivato è definito completamente dal sottostante, noi cercheremo di valutarlo in termini del valore S .

Prima di passare al paragrafo successivo enunciamo una proposizione. Per la dimostrazione si veda Arbitrage Theory in Continuous Time di T. Bjork.

Proposizione 1.9. *Supponiamo di essere nelle ipotesi del modello di BSM e che esista un portafoglio ϕ autofinanziato tale che il suo valore V^ϕ è dato da*

$$dV^\phi(t) = k(t)V^\phi(t)dt$$

dove k è un processo adattato. Allora deve valere $k(t) = r$ per ogni t , altrimenti si avrebbe un'opportunità di arbitraggio.

1.2 Equazione di Black-Scholes

Facciamo qualche passo indietro e riprendiamo il modello introdotto all'inizio del capitolo

$$dB(t) = rB(t)dt \quad (1.3)$$

$$dS(t) = S(t)\alpha(t, S(t))dt + S(t)\sigma(t, S(t))d\bar{W}(t) \quad (1.4)$$

dove il tasso di interesse r è una costante. Consideriamo un prodotto derivato $h = f(S(T))$ ed assumiamo che quest'ultimo sia commercializzato sul mercato al prezzo $\Pi(t) = \Pi(t, h)$ dato da

$$\Pi(t) = C(t, S(t)) \quad (1.5)$$

per una qualche funzione regolare C . Il nostro compito è capire di che forma deve essere C in modo che il mercato $(B(t), S(t), \Pi(t, h))$ sia privo di arbitraggio.

Applicando la formula di Itô a (1.4) e a (1.5) otteniamo

$$d\Pi(t) = \alpha_\pi(t)\Pi(t)dt + \sigma_\pi(t)\Pi(t)d\bar{W}(t) \quad (1.6)$$

dove i processi $\alpha_\pi(t)$ e $\sigma_\pi(t)$ sono definiti da

$$\alpha_\pi(t) = \frac{C_t + \alpha SC_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{ss}}{C} \quad (1.7)$$

$$\sigma_\pi(t) = \frac{\sigma SC_s}{C} \quad (1.8)$$

Qui i pedici stanno ad indicare le derivate parziali ed abbiamo usato una notazione ristretta per indicare

$$\frac{\sigma S C_s}{C} = \frac{\sigma(t, S(t)) S(t) C_s(t, S(t))}{C(t, S(t))}$$

e similmente negli altri termini.

Vogliamo ora formare un portafoglio basato su due attivi: la nostra azione e l'attivo definito dall'equazione differenziale stocastica (1.6). Denotiamo il portafoglio relativo con (u_S, u_π) e grazie al lemma 1.7 otteniamo la seguente dinamica per il valore V del nostro portafoglio

$$dV = V\{u_S[\alpha dt + \sigma d\bar{W}] + u_\pi[\alpha_\pi dt + \sigma_\pi d\bar{W}]\}$$

dove per semplicità abbiamo ommesso la lettera t . Ora con qualche passaggio possiamo riscrivere l'uguaglianza in questo modo

$$dV = V[u_S \alpha + u_\pi \alpha_\pi] dt + V[u_S \sigma + u_\pi \sigma_\pi] d\bar{W} \quad (1.9)$$

Osserviamo che i termini tra parentesi sono lineari negli argomenti u_S e u_π . Ricordiamo inoltre che vale

$$u_S + u_\pi = 1$$

per ogni t . Definiamo ora il portafoglio relativo risolvendo il seguente sistema lineare

$$u_S + u_\pi = 1 \quad (1.10)$$

$$u_S \sigma + u_\pi \sigma_\pi = 0 \quad (1.11)$$

In questo modo possiamo osservare che il termine $d\bar{W}$ svanisce dall'equazione (1.9) e quindi diventa

$$dV = V[u_S \alpha + u_\pi \alpha_\pi] dt \quad (1.12)$$

Ora ricordando la proposizione 1.9 e data la nostra ipotesi di N.A. sappiamo che deve valere

$$u_S \alpha + u_\pi \alpha_\pi = r \quad (1.13)$$

Risolvendo ora il sistema dato dalle equazioni (1.10) e (1.11) otteniamo

$$u_S = \frac{\sigma_\pi}{\sigma_\pi - \sigma} \quad (1.14)$$

$$u_\pi = \frac{-\sigma}{\sigma_\pi - \sigma} \quad (1.15)$$

Le quali possono essere riscritte più esplicitamente usando (1.8)

$$u_S = \frac{S(t) C_s(t, S(t))}{S(t) C_s(t, S(t)) - C(t, S(t))} \quad (1.16)$$

$$u_\pi = \frac{-C(t, S(t))}{S(t) C_s(t, S(t)) - C(t, S(t))} \quad (1.17)$$

Ora sostituendo (1.7), (1.16) e (1.17) all'interno della condizione (1.13), dopo qualche passaggio algebrico, troviamo

$$C_t(t, S(t)) + rS(t)C_s(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S(t))S^2(t)C_{ss}(t, S(t)) - rC(t, S(t)) = 0$$

Inoltre dal paragrafo precedente sappiamo che

$$\Pi(T) = f(S(T))$$

Ora si può mostrare che $S(t)$, nel modello BSM, ha come supporto l'intera retta reale positiva. Per cui $S(T)$ può assumere qualsiasi valore e C deve soddisfare la seguente equazione alle derivate parziali

$$C_t(t, s) + rsC_s(t, s) + \frac{1}{2}s^2\sigma^2(t, s)C_{ss}(t, s) - rC(t, s) = 0$$

$$C(T, s) = f(s)$$

Mettendo tutti questi risultati insieme abbiamo provato il seguente teorema, il quale è alla base delle formula di Black-Scholes.

Teorema 1.10. (Equazione di Black-Scholes) *Assumiamo che il mercato sia specificato dalle equazioni (1.3)-(1.4) e che vogliamo valutare un prodotto derivato della forma $h = f(S(T))$. Allora l'unica funzione della forma (1.5) consistente con l'ipotesi di non arbitraggio è soluzione del seguente problema al contorno nel dominio $[0, T] \times \mathbb{R}_+$.*

$$C_t(t, s) + rsC_s(t, s) + \frac{1}{2}s^2\sigma^2(t, s)C_{ss}(t, s) - rC(t, s) = 0 \quad (1.18)$$

$$C(T, s) = f(s) \quad (1.19)$$

1.3 Formule di Black-Scholes

Consideriamo nuovamente un mercato dato dalle equazioni

$$dB(t) = rB(t)dt \quad (1.20)$$

$$dS(t) = S(t)\alpha(t, S(t))dt + S(t)\sigma(t, S(t))d\bar{W}(t) \quad (1.21)$$

e un prodotto derivato $h = f(S(T))$. A questo punto sappiamo che il prezzo di non arbitraggio di h ci è dato da $\Pi(t, h) = C(t, S(T))$ dove la funzione C è soluzione di (1.18)-(1.19). Osserviamo ora che noi sappiamo risolvere tale sistema, infatti è giusto nella forma che può essere risolta usando la formula di rappresentazione stocastica di Feynman-Kač. Per cui troviamo

$$C(t, s) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{t,s}[f(X(T))] \quad (1.22)$$

dove il processo X è definito da

$$dX(u) = rX(u)du + X(u)\sigma(u, X(u))dW(u) \quad (1.23)$$

$$X(u) = s \quad (1.24)$$

dove W è un processo di Wiener. È importante notare che la SDE (1.23) è esattamente della stessa forma del processo S . L'unica differenza, ma importante, è che mentre S ha media α , il processo X ha media r .

Il processo X è chiaramente solo uno strumento introdotto sul momento, avremmo potuto chiamarlo diversamente. Avremmo potuto persino chiamarlo S data la somiglianza. Questo è accettabile fintanto che non si faccia confusione tra il vero processo S dato da (1.21) e il nuovo processo. Questo è possibile seguendo la seguente procedura.

Denotiamo con \mathbb{P} la misura di probabilità che governa il nostro modello (1.20)-(1.21). Per cui diremo che la dinamica di S secondo \mathbb{P} è data da (1.21). Definiamo ora una nuova misura di probabilità \mathbb{Q} sotto la quale S ha una differente distribuzione di probabilità. Questa ci è data imponendo che la dinamica di S sotto \mathbb{Q} sia

$$dS(t) = rS(t)dt + S(t)\sigma(t, S(t))dW(t) \quad (1.25)$$

dove W è un \mathbb{Q} -processo di Wiener. A questo punto per semplicità introduciamo delle notazioni alternative.

- Identificheremo con la lettera \mathbb{E} il valore atteso sotto la probabilità \mathbb{P} , mentre con $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ indicheremo la speranza sotto la misura \mathbb{Q} .
- Chiameremo \bar{W} il processo di Wiener sotto la probabilità \mathbb{P} e con W denoteremo il processo di Wiener sotto \mathbb{Q} .

Noi lavoreremo molto più spesso con la misura di probabilità \mathbb{Q} invece che con \mathbb{P} . E questa è la ragione per cui fin dall'inizio è stato scelto di chiamare \bar{W} e non W il processo sotto \mathbb{P} . Enunciamo ora un teorema fondamentale.

Teorema 1.11. *Il prezzo di non arbitraggio di un prodotto derivato $h = f(S(T))$ è dato da $\Pi(t, h) = C(t, S(t))$, dove C è definita dalla formula*

$$C(t, s) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{t,s}^{\mathbb{Q}}[f(S(T))] \quad (1.26)$$

dove la \mathbb{Q} -dinamica di S è data da (1.25)

La misura di probabilità \mathbb{Q} è a volte chiamata *misura martingala*. Il come mai verrà chiarito nel prossimo capitolo.

Torniamo finalmente al modello BSM.

$$\begin{aligned} dB(t) &= rB(t)dt \\ dS(t) &= \alpha S(t)dt + \sigma S(t)d\bar{W}(t) \end{aligned}$$

dove α e σ sono costanti. Ora sfruttando le proprietà del moto geometrico browniano possiamo riscrivere $S(T)$ esplicitamente

$$S(T) = s \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(W(T) - W(t))\right\}$$

Da cui abbiamo

$$C(t, s) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(se^U)g(z)dz \quad (1.27)$$

dove U è una variabile aleatoria con distribuzione

$$N\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

e g è la corrispondente funzione di densità.

La formula (1.27) generalmente non può essere semplificata ulteriormente, tuttavia noi siamo proprio in un caso fortunato. Infatti per un'opzione europea sappiamo che $h(x) = \max[0, x - K]$. Quindi otteniamo

$$\mathbb{E}_{t,s}^{\mathbb{Q}} \left[\max[0, se^U - K] \right] = 0 \cdot \mathbb{Q}(se^U \leq K) + \int_{\log(\frac{K}{s})}^{\infty} (se^z - K)g(z)dz$$

Dopo qualche calcolo siamo così giunti al famoso risultato conosciuto come la formula di Black-Scholes.

Teorema 1.12. *Il prezzo di un'opzione europea di tipo call con prezzo di esercizio K e data di scadenza T è dato dalla formula $\Pi(t) = C(t, S(t))$, dove*

$$C(t, s) = sZ(x(t, s)) - e^{-r(T-t)}KZ(x - \sigma\sqrt{T-t})$$

dove Z è la funzione di ripartizione di una normale standard e

$$x(t, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left\{ \log\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right\}$$

Questo capitolo è servito per introdurre il problema della valutazione di un'opzione europea. In effetti il nostro scopo era fondamentalmente quello di arrivare ad enunciare la formula di Black-Scholes, senza dare molto peso ai vari passaggi che la precedono. Nei prossimi capitoli analizzeremo il caso a tempo discreto. Ci soffermeremo più a lungo sui vari aspetti e daremo definizioni formali di molti concetti qui introdotti.

Riportiamo ora il grafico della formula di BS di un'opzione europea di tipo call (l'unità del tempo è un anno).

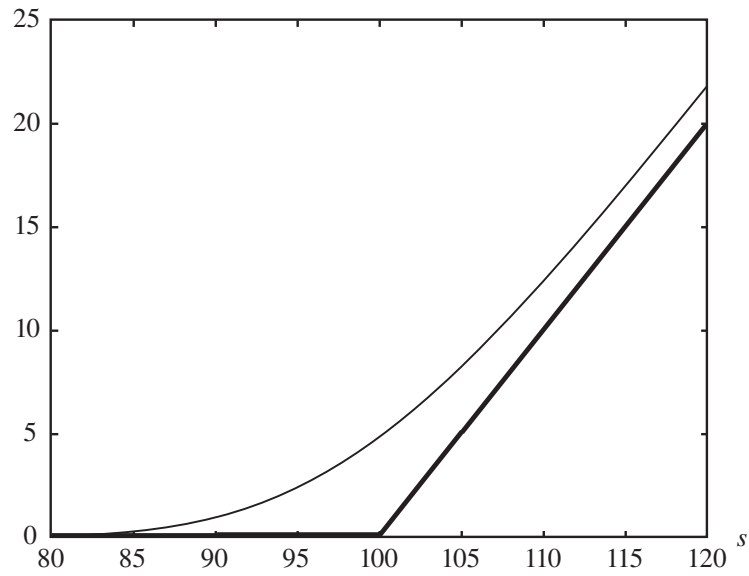


Figura 1.3: Valutazione di Black-Scholes di una call: $K = 100$, $\sigma = 0.2$, $T - t = 0.25$

Infine, prima di passare avanti, riscriviamo la formula di BS in un'altra forma, ciò ci sarà utile in seguito. Quindi denotiamo il termine e^r con

$$e^r = (1 + R)$$

E per $t = 0$ avremo

$$C(0, s) = sZ(x(0, s)) - (1 + R)^{-T} KZ(x - \sigma\sqrt{T})$$

dove

$$x(0, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log \left(\frac{s}{K(1+R)^{-T}} \right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

Capitolo 2

Modello a tempo discreto

L'obiettivo di questo capitolo è quello di introdurre la teoria delle opzioni in un modello a tempo discreto. Rivedremo molte delle definizioni enunciate nel primo capitolo, alcune modificate per adattarsi al modello discreto, altre richiamate per darne una definizione più rigorosa. Il modello a tempo discreto è una semplificazione dei mercati finanziari reali, tuttavia, grazie alla sua semplicità ci permetterà di analizzare casi reali di grande importanza con basi matematiche elementari. Da qui la sua importanza.

2.1 Basi del modello

2.1.1 Attivi finanziari

Un modello a tempo discreto di un mercato finanziario è costruito su di uno spazio di probabilità finito $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ equipaggiato con una filtrazione, cioè una sequenza crescente di σ -algebre contenute in \mathcal{F} : $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N$. \mathcal{F}_n può essere vista come l'informazione posseduta al tempo n . Mentre N generalmente rappresenta la *scadenza* dell'opzione. Da ora in poi assumeremo che $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\forall \omega \in \Omega \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$. Il mercato è composto da $(d+1)$ *attivi finanziari* il cui valore al tempo n è dato dalle variabili aleatorie non-negative $S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d$, misurabili rispetto a \mathcal{F}_n (gli investitori conoscono i prezzi passati e presenti ma chiaramente non quelli futuri). Il vettore $S_n = (S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d)$ è il vettore dei prezzi al tempo n . L'attivo indicizzato con 0 è detto *attivo privo di rischio* e si ha che $S_0^0 = 1$. Se il rendimento di questo attivo dopo un'unità di tempo è costante e uguale ad r allora otteniamo che $S_n^0 = (1+r)^n$. Il coefficiente $\beta_n = \frac{1}{S_n^0}$ è chiamato *fattore di attualizzazione* (dal tempo 0 al tempo n): se investiamo $\beta_n = \frac{1}{S_n^0}$ euro al tempo 0 in attivi senza rischio allora potremo ritirare 1 euro al tempo n . Gli attivi indicizzati con $i = 1, \dots, d$ al contrario sono detti *attivi con rischio*. Nella realtà potremmo vedere questi due gruppi di investimenti rispettivamente come dei titoli obbligazionari e dei titoli azionari.

2.1.2 Strategie

Una *strategia finanziaria* è definita come un processo stocastico discreto $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ in \mathbb{R}^{d+1} dove ϕ_n^i rappresenta il numero di attivi finanziari del bene i posseduti nel nostro portafoglio al tempo n . ϕ è prevedibile, ciò significa che

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, d\} \begin{cases} \phi_0^i & \text{è } \mathcal{F}_0 - \text{misurabile} \\ \phi_n^i & \text{è } \mathcal{F}_{n-1} - \text{misurabile per } n \geq 1 \end{cases}$$

Questa assunzione ha senso poiché la gestione del portafoglio al tempo n $\phi_n = (\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d)$ è determinata dalle informazioni possedute al tempo $n - 1$.

Definiamo il *valore del portafoglio* al tempo n come il prodotto scalare

$$V_n(\phi) = \phi_n \cdot S_n = \sum_{i=0}^d \phi_n^i S_n^i$$

e il suo *valore attualizzato* come

$$\tilde{V}_n(\phi) = \beta_n(\phi_n \cdot S_n) = \phi_n \cdot \tilde{S}_n$$

dove $\tilde{S}_n = (1, \beta_n S_n^1, \dots, \beta_n S_n^d)$ è il vettore dei prezzi attualizzati.

Diamo ora nuovamente la definizione di strategia autofinanziata.

Una strategia è detta *autofinanziata* se la seguente equazione è soddisfatta per tutti gli $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$$

L'interpretazione di ciò è la seguente: al tempo n gli investitori, consci dei nuovi prezzi S_n^0, \dots, S_n^d , riaggiustano i loro portafogli dalla posizione ϕ_n alla posizione ϕ_{n+1} senza aver nessun guadagno o nessuna spesa.

Osservazione 2.1. L'uguaglianza $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$ è chiaramente equivalente a

$$\phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_n \cdot S_n$$

oppure a

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n)$$

Al tempo $n + 1$ il portafoglio ha un valore di $\phi_{n+1} \cdot S_{n+1}$ e $\phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_{n+1} \cdot S_n$ è il guadagno netto causato dal cambiamento dei prezzi dal tempo n al tempo $n + 1$. Quindi i guadagni o le perdite realizzate seguendo una strategia autofinanziata sono dovuti esclusivamente al cambiamento dei prezzi.

La seguente proposizione renderà questo più chiaro in termini dei valori attualizzati.

Proposizione 2.2. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (1): *La strategia ϕ è autofinanziata.*

- (2): Per ogni $n \in \{1, \dots, N\}$

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta S_j$$

dove ΔS_j è il vettore $S_j - S_{j-1}$.

- (3): Per ogni $n \in \{1, \dots, N\}$

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j$$

dove $\Delta \tilde{S}_j$ è il vettore $\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$.

Dimostrazione. L'equivalenza tra (1) e (2) è una conseguenza dell'Osservazione 2.1. Mentre l'equivalenza tra (1) e (3) segue dal fatto che $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$ se e solo se $\phi_n \cdot \tilde{S}_n = \phi_{n+1} \cdot \tilde{S}_n$ \square

Questa proposizione mostra che, se un investitore segue una strategia autofinanziata, il valore attualizzato del suo portafoglio, e quindi il suo valore reale, è completamente definito dal suo valore iniziale e dalla strategia $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_{0 \leq n \leq N}$. Questo poichè $\Delta \tilde{S}_j^0 = 0$. Inoltre è possibile provare la seguente proposizione.

Proposizione 2.3. *Per ogni processo prevedibile $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_{0 \leq n \leq N}$ e per ogni variabile aleatoria V_0 \mathcal{F}_0 -misurabile, esiste un unico processo prevedibile $(\phi_n^0)_{0 \leq n \leq N}$ tale che la strategia $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$ è autofinanziata e il suo valore iniziale è V_0 .*

Dimostrazione. Il fatto che la strategia sia autofinanziata implica che

$$\tilde{V}_n(\phi) = \phi_n^0 + \phi_n^1 \tilde{S}_n^1 + \dots + \phi_n^d \tilde{S}_n^d = V_0 + \sum_{j=1}^n (\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d)$$

ciò definisce ϕ_n^0 . Ora rimane da controllare che ϕ^0 sia prevedibile, ma questo è ovvio, basta considerare che

$$\phi_n^0 = V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d) + (\phi_n^1 (-\tilde{S}_{n-1}^1) + \dots + \phi_n^d (-\tilde{S}_{n-1}^d))$$

\square

2.1.3 Strategie ammissibili e arbitraggio

Non abbiamo fatto alcuna assunzione riguardo al segno delle quantità ϕ_n^i . Se $\phi_n^0 < 0$ diremo che abbiamo preso in prestito l'ammontare $|\phi_n^0|$ in attivi privi di rischio. Mentre se $\phi_n^i < 0$ per $i \geq 1$ diremo che abbiamo assunto una *posizione corta* rispetto all'attivo i . Posizioni corte e prestiti sono permessi, tuttavia il valore del nostro portafoglio deve essere positivo in qualsiasi momento.

Definizione 2.4. Una strategia ϕ è detta *ammissibile* se è autofinanziata e se $V_n(\phi) \geq 0$ per ogni $n \in \{0, 1, \dots, N\}$.

Questa definizione è giustificata dal fatto che un investitore deve essere in grado di pagare i suoi debiti in ogni momento.

Possiamo ora enunciare nuovamente la nozione di arbitraggio, modificata per adattarsi al caso discreto. Ricordiamo che l'arbitraggio rappresenta la possibilità di avere un profitto senza esporsi a nessun rischio:

Definizione 2.5. Una opportunità di *arbitraggio* è una strategia ammissibile tale che

$$V_0(\phi) = 0$$

e

$$\mathbb{P}(V_N(\phi) \geq 0) = 1 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(V_N(\phi) > 0) > 0$$

Noi escluderemo dal nostro modello alcuna opportunità di arbitraggio anche se tale assunzione non sempre rispecchia la realtà. Ciò sarà alla base del paragrafo successivo.

2.2 Martingale e opportunità di arbitraggio

Prima di analizzare la connessione tra le martingale e l'arbitraggio diamo una definizione formale di martingala e ricordiamo alcune proprietà fondamentali.

In questo paragrafo, come prima, consideriamo uno spazio di probabilità finito $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$. Equipaggiato con una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ (in questo caso non è necessario assumere $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ o che $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$). Inoltre una sequenza di variabili aleatorie $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ si dice adattata alla filtrazione se per ogni n X_n è \mathcal{F}_n -misurabile. Diamo ora la definizione di martingala:

Definizione 2.6. Una sequenza adattata $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ di variabili aleatorie reali è una *martingala* se

$$\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n \quad \forall n \leq N - 1$$

Questa definizione può essere estesa al caso multidimensionale: una sequenza $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ di variabili aleatorie a valori in \mathbb{R}^d è una martingala se ogni componente è a sua volta una martingala.

Le seguenti proprietà seguono facilmente dalla definizione e dal concetto di speranza condizionale:

1. $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ è una martingala se e solo se

$$\mathbb{E}[M_{n+j} | \mathcal{F}_n] = M_n \quad \forall j \geq 0$$

2. Se $(M_n)_{n \geq 0}$ è una martingala allora

$$\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0]$$

3. La somma di due martingale è una martingala.

Definizione 2.7. Una sequenza adattata $(H_n)_{0 \leq n \leq N}$ è prevedibile se per ogni $n \geq 1$ H_n è \mathcal{F}_{n-1} -misurabile.

Proposizione 2.8. Sia $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ una martingala e $(H_n)_{0 \leq n \leq N}$ una sequenza prevedibile rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$. Denotiamo $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$. La sequenza $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ definita da

$$\begin{aligned} X_0 &= H_0 M_0 \\ X_n &= H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \dots + H_n \Delta M_n \quad \text{con } n \geq 1 \end{aligned}$$

è una martingala rispetto a $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$.

La sequenza (X_n) così definita è detta la *martingala trasformata* di (M_n) da (H_n) .

Dimostrazione. Chiaramente (X_n) è una sequenza adattata. Inoltre per $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n] \\ &= H_{n+1} \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] \quad \text{dato che } H_{n+1} \text{ è } \mathcal{F}_{n-1}\text{-misurabile} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n] = X_n$$

Questo dimostra che (X_n) è una martingala. □

Una conseguenza di questa proposizione, di fondamentale importanza per il nostro studio, è che quindi (V_n) , il valore del nostro portafoglio, è una martingala. E dalle proprietà delle martingale si ha che il valore atteso di V_n seguendo una strategia autofinanziata è uguale a V_0 .

Ora enunciamo una proposizione che ci sarà utile in seguito.

Proposizione 2.9. Una sequenza adattata di variabili aleatorie reali (M_n) è una martingala se e solo se per ogni sequenza prevedibile (H_n) si ha

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^N H_n \Delta M_n \right] = 0$$

Dimostrazione. Per la proposizione 2.8 se (M_n) è una martingala, la sequenza (X_n) definita da $X_0 = 0$ e per $n \geq 1$ $X_n = \sum_{n=1}^N H_n \Delta M_n$, per ogni sequenza prevedibile (H_n) è anch'essa una martingala. Quindi $\mathbb{E}[X_N] = \mathbb{E}[X_0] = 0$. Viceversa, preso $j \in \{1, \dots, N\}$ noi possiamo considerare la sequenza (H_n) definita da: $H_n = 0$ per $n \neq j$ e $H_j = \mathbb{1}_A$ per un qualsiasi $A \in \mathcal{F}_{j-1}$. Chiaramente (H_n) è prevedibile. Per ipotesi $\mathbb{E}[\sum_{n=1}^N H_n \Delta M_n] = 0$, cioè

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(M_j - M_{j-1})] = 0$$

Quindi $\mathbb{E}[M_j | \mathcal{F}_{j-1}] = M_{j-1}$. □

Adesso possiamo tornare a parlare del nostro modello a tempo discreto mettendo in evidenza la connessione tra martingale e arbitraggio. Prima però diamo una piccola definizione.

Definizione 2.10. Il mercato finanziario si dice *privo di arbitraggio* (N.A., dall'inglese "No Arbitrage") se non è presente alcuna opportunità di arbitraggio.

Teorema 2.11. *Il mercato è privo di arbitraggio se e solo se esiste una misura di probabilità \mathbb{P}^* equivalente a \mathbb{P} tale che i valori attualizzati degli attivi finanziari sono \mathbb{P}^* -martingale.*

Ricordiamo che due misure di probabilità \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 sono equivalenti se e solo se per ogni evento A , $\mathbb{P}_1(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}_2(A) = 0$. E poiché abbiamo assunto $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$, ciò implica che $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$.

Dimostrazione. (\Leftarrow) Assumiamo che esista una probabilità \mathbb{P}^* equivalente a \mathbb{P} sotto cui i valori attualizzati degli attivi sono martingale. Allora per una qualsiasi strategia autofinanziata (ϕ) , (2.2) implica

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j$$

E per la proposizione 2.8, $(\tilde{V}_n(\phi))$ è una \mathbb{P}^* -martingala. Questo significa che $\tilde{V}_N(\phi)$ e $\tilde{V}_0(\phi)$ hanno lo stesso valore atteso sotto \mathbb{P}^* :

$$\mathbb{E}^*[\tilde{V}_N(\phi)] = \mathbb{E}^*[\tilde{V}_0(\phi)]$$

Se la strategia è ammissibile e il suo valore iniziale è zero allora $\mathbb{E}^*[\tilde{V}_N(\phi)] = 0$ con $\tilde{V}_N(\phi) \geq 0$. Quindi $\tilde{V}_N(\phi) = 0$ dato che $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$.

(\Rightarrow) Questa freccia è alquanto più impegnativa quindi divideremo la dimostrazione in due parti e al termine della prima enunceremo un lemma utile per la seconda.

(a) Chiamiamo Γ il cono convesso delle variabili aleatorie strettamente positive. Allora si ha N.A. se e solo se per ogni strategia ammissibile ϕ vale: $V_0(\phi) = 0 \Rightarrow \tilde{V}_N(\phi) \notin \Gamma$.

Ad ogni processo ammissibile $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)$ noi associamo il processo definito da

$$\tilde{G}_n(\phi) = \sum_{j=1}^n (\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d)$$

Questo è il processo dei guadagni attualizzati realizzati seguendo la strategia autofinanziata $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)$. Per la proposizione 2.3 esiste un unico processo (ϕ_n^0) tale che la strategia $(\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d)$ è autofinanziata con valore iniziale uguale a 0. $\tilde{G}_n(\phi)$ è il valore attualizzato di questa strategia al tempo n . A questo punto, data l'assenza di arbitraggio, se $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$ per ogni n allora ciò implica che $\tilde{G}_N(\phi) = 0$. Il seguente lemma dimostra che anche se non assumiamo che $\tilde{G}_n(\phi)$ sia non-negativa, continua a valere $\tilde{G}_N(\phi) \notin \Gamma$.

Lemma 2.12. *Se il mercato è privo di arbitraggio ogni processo prevedibile $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)$ soddisfa*

$$\tilde{G}_N(\phi) \notin \Gamma$$

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo che $\tilde{G}_N(\phi) \in \Gamma$. Ora se $\tilde{G}_n(\phi) \geq 0$ per ogni $n \in \{1, \dots, N\}$ allora è chiaramente presente nel mercato un'opportunità di arbitraggio. Quindi si deve avere che le $\tilde{G}_n(\phi)$ non siano tutte non-negative. Definiamo $\tilde{n} = \sup\{k \mid \mathbb{P}[\tilde{G}_k(\phi) < 0] > 0\}$. Per quanto assunto dobbiamo avere

$$\tilde{n} \leq N - 1 \quad \text{e} \quad \forall m > \tilde{n} \quad \tilde{G}_m(\phi) \geq 0$$

Introduciamo a questo punto un nuovo processo ψ

$$\psi_j(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \leq \tilde{n} \\ \mathbb{1}_A(\omega)\phi_j(\omega) & \text{se } j > \tilde{n} \end{cases}$$

dove A è l'evento $\{\tilde{G}_{\tilde{n}}(\phi) < 0\}$. Poichè ϕ è prevedibile e A è $\mathcal{F}_{\tilde{n}}$ -misurabile, allora anche ψ è prevedibile. Ora se consideriamo

$$\tilde{G}_j(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \leq \tilde{n} \\ \mathbb{1}_A(\tilde{G}_j(\phi) - \tilde{G}_{\tilde{n}}(\phi)) & \text{se } j > \tilde{n} \end{cases}$$

si ha che $\tilde{G}_j(\psi) \geq 0$ per ogni $j \in \{0, \dots, N\}$ e $\tilde{G}_N(\psi) > 0$ su A . Ma questo è assurdo data l'ipotesi di assenza di arbitraggio. \square

Possiamo ora passare alla seconda parte della dimostrazione del teorema.

(b) Chiamiamo Σ l'insieme delle variabili aleatorie $\tilde{G}_N(\phi)$, con ϕ processo prevedibile in \mathbb{R}^d . Σ è chiaramente un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^Ω , dove \mathbb{R}^Ω è l'insieme delle variabili aleatorie definite su Ω . Grazie al lemma 2.12 sappiamo che Σ non interseca Γ . Quindi non interseca l'insieme compatto e convesso $K = \{X \in \Gamma \mid \sum_{\omega} X(\omega) = 1\}$ incluso in Γ . A questo punto, per il teorema di separazione di insiemi convessi, esiste $(\lambda(\omega))_{\omega \in \Omega}$ tale che

$$(1) \quad \forall X \in K, \quad \sum_{\omega} \lambda(\omega)X(\omega) > 0.$$

(2) Per ogni processo prevedibile ϕ

$$\sum_{\omega} \lambda(\omega)\tilde{G}_N(\phi)(\omega) = 0$$

Dalla proprietà (1) deduciamo che $\lambda(\omega) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$. Per cui la probabilità \mathbb{P}^* definita da

$$\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')}$$

è equivalente a \mathbb{P} .

Inoltre, se denotiamo con \mathbb{E}^* la speranza sotto la probabilità \mathbb{P}^* , la proprietà (2) ci dice che, per un qualsiasi processo prevedibile (ϕ_n) in \mathbb{R}^d ,

$$\mathbb{E}^* \left[\sum_{j=1}^N \phi_j \Delta \tilde{S}_j \right] = 0$$

Da questo segue che per ogni $i \in \{1, \dots, d\}$ e per una qualsiasi sequenza prevedibile (ϕ_n^i) in \mathbb{R} , noi abbiamo

$$\mathbb{E}^* \left[\sum_{j=1}^N \phi_j^i \Delta \tilde{S}_j^i \right] = 0$$

Quindi, per la proposizione 2.9, possiamo concludere che i valori attualizzati $(\tilde{S}_n^1), \dots, (\tilde{S}_n^d)$ sono martingale rispetto alla misura di probabilità \mathbb{P}^* . \square

2.3 Mercati completi e valutazione delle opzioni

2.3.1 Mercati completi

Nell'introduzione abbiamo parlato delle *opzioni Europee*. Queste non sono altro che un caso particolare di prodotto derivato:

Definizione 2.13. Un *prodotto derivato finanziario*, o più semplicemente *prodotto derivato* o anche solo *derivato*, è una qualsiasi variabile aleatoria h della forma $h = f(Z_N)$, dove $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e Z_N è il valore di un determinato attivo finanziario al tempo N .

Avremmo potuto dare una definizione di prodotto derivato più generale ma non è necessaria per i nostri obiettivi.

Tornando alle opzioni Europee ricordiamo che queste sono caratterizzate da una data di scadenza N e da un prezzo di esercizio K . Ora consideriamo il caso di una *call* sull'attivo S^1 . Definiamo il *saldo di un'opzione* come la variabile aleatoria h , \mathcal{F}_N -misurabile, data da $h = (S_N^1 - K)_+$ (con una *put* avremmo avuto $h = (K - S_N^1)_+$). Quindi, dato che ad una qualsiasi opzione Europea noi possiamo sempre associare h e che quest'ultima è una funzione di S_N^1 , si può intuire perché abbiamo detto che le opzioni europee non sono altro che un caso particolare di derivato.

Definizione 2.14. Un prodotto derivato h si dice *replicabile* se esiste una strategia ammissibile ϕ di valore h al tempo N . In quel caso la strategia ϕ è detta *strategia replicante*.

Osservazione 2.15. In un mercato privo di arbitraggio ci basterà trovare una strategia autofinanziata di valore h alla scadenza per poter concludere che h è replicabile. Infatti, se ϕ è una strategia autofinanziata e \mathbb{P}^* una misura di probabilità equivalente a \mathbb{P} sotto la quale i valori attualizzati degli attivi sono martingale, allora anche $(\tilde{V}_n(\phi))$ è una \mathbb{P}^* -martingala. Quindi per $n \in \{0, \dots, N\}$ $\tilde{V}_n(\phi) = \mathbb{E}^*[\tilde{V}_N(\phi) | \mathcal{F}_n]$. Per cui, se $\tilde{V}_N(\phi) \geq 0$ (in particolare se $\tilde{V}_N(\phi) = h$) allora la strategia ϕ è ammissibile.

Definizione 2.16. Il mercato si dice *completo* se ogni prodotto derivato è replicabile.

Assumere che il mercato sia completo è alquanto restrittivo e non ha sempre una chiara giustificazione economica o reale, come del resto pure assumere che non ci siano opportunità di arbitraggio. Tuttavia questo ci permetterà di sviluppare una teoria alquanto semplice, e in certi casi anche molto efficace, riguardo la valutazione di un'opzione.

Il seguente teorema da una caratterizzazione precisa della completezza dei mercati N.A..

Teorema 2.17. *Un mercato privo di arbitraggio è completo se e solo se esiste un'unica misura di probabilità \mathbb{P}^* equivalente a \mathbb{P} sotto la quale i valori attualizzati degli attivi sono martingale.*

Dimostrazione. (\Rightarrow) Assumiamo che il mercato sia N.A. e completo. Allora, qualsiasi variabile aleatoria non-negativa h , \mathcal{F}_N -misurabile, può essere scritta come $h = V_N(\phi)$, dove ϕ è una strategia ammissibile che replica il derivato h . Dato che ϕ è autofinanziata, sappiamo che

$$\frac{h}{S_N^0} = \tilde{V}_N(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^N \phi_j \Delta \tilde{S}_j$$

Ora, siano \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 due misure di probabilità tali che $(\tilde{V}_n(\phi))_{0 \leq n \leq N}$ è una martingala per entrambe. Segue che per $i = 1$ o $i = 2$

$$\mathbb{E}_i[\tilde{V}_N(\phi)] = \mathbb{E}_i[V_0(\phi)] = V_0(\phi)$$

L'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Dunque

$$\mathbb{E}_1 \left[\frac{h}{S_N^0} \right] = \mathbb{E}_2 \left[\frac{h}{S_N^0} \right]$$

e dato che h è arbitraria, $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ sull'intera σ -algebra \mathcal{F}_N , la quale abbiamo detto essere uguale ad \mathcal{F} .

(\Leftarrow) Assumiamo per assurdo che il mercato sia N.A. e incompleto. Allora esisterà una variabile aleatoria $h \geq 0$ la quale non è replicabile. Chiamiamo Σ l'insieme delle variabili aleatorie della forma

$$U_0 + \sum_{n=1}^N \phi_n \Delta \tilde{S}_n$$

dove U_0 è \mathcal{F}_0 -misurabile e $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ è un processo prevedibile in \mathbb{R}^d .

Segue dalla proposizione 2.3 e dall'osservazione 2.15 che la variabile h/S_N^0 non appartiene a Σ . Quindi Σ è un sottoinsieme proprio dell'insieme delle variabili aleatorie su (Ω, \mathcal{F}) . Dunque, se \mathbb{P}^* è una probabilità equivalente a \mathbb{P} sotto la quale i valori attualizzati degli attivi sono martingale e se noi definiamo il seguente prodotto scalare

sull'insieme delle variabili aleatorie $(X, Y) \mapsto \mathbb{E}^*[XY]$, allora notiamo che esisterà una variabile aleatoria X non nulla ortogonale a Σ . A questo punto definiamo

$$\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) = \left(1 + \frac{X(\omega)}{2 \|X\|_\infty}\right) \cdot \mathbb{P}^*(\{\omega\})$$

con $\|X\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$. Poiché $\mathbb{E}^*[X] = 0$, questa è una nuova misura di probabilità equivalente a \mathbb{P} e diversa da \mathbb{P}^* . Inoltre

$$\mathbb{E}^{**} \left[\sum_{n=1}^N \phi_n \Delta \tilde{S}_n \right] = 0$$

per qualsiasi processo prevedibile $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$. Segue della proposizione 2.9 che $(\tilde{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$ è una \mathbb{P}^{**} -martingala. Ma questo è assurdo per l'ipotesi che esista un'unica probabilità equivalente a \mathbb{P} sotto la quale i valori attualizzati sono martingale. \square

Nel prossimo paragrafo e nei capitoli successivi, vedremo come \mathbb{P}^* assume un ruolo centrale nel calcolo del prezzo di un'opzione.

2.3.2 Valutare e replicare un prodotto derivato in un mercato completo

Assumiamo che il mercato sia privo di arbitraggio e completo e chiamiamo \mathbb{P}^* l'unica misura di probabilità sotto la quale i valori attualizzati degli attivi sono martingale. Sia h una variabile aleatoria non-negativa \mathcal{F}_N -misurabile e ϕ la strategia ammissibile che replica h :

$$V_N(\phi) = h$$

Abbiamo visto che la sequenza $(\tilde{V}_n)_{0 \leq n \leq N}$ è una \mathbb{P}^* -martingala, per cui

$$V_0(\phi) = \mathbb{E}^*[\tilde{V}_N(\phi)]$$

dato che $V_0(\phi) = \mathbb{E}^*[h/S_N^0]$, e più generalmente

$$V_n(\phi) = S_n^0 \mathbb{E}^* \left[\frac{h}{S_N^0} \middle| \mathcal{F}_n \right] \quad \text{per } n = 0, 1, \dots, N$$

Quindi in qualsiasi momento il valore della strategia ammissibile che replica h è completamente determinato da h . A questo punto è piuttosto naturale affermare che $V_n(\phi)$ è il prezzo dell'opzione al tempo n : infatti questo è proprio il valore necessario al tempo n per replicare h seguendo la strategia ϕ . Ad esempio, se al tempo 0 un investitore vende l'opzione per

$$\mathbb{E}^* \left[\frac{h}{S_N^0} \right]$$

lui può seguire la strategia replicante ϕ per generare un importo h al tempo N . In questo caso si dice che l'investitore è *perfettamente coperto*.

Osservazione 2.18. E' importante notare che per il calcolo del prezzo di un'opzione è sufficiente conoscere \mathbb{P}^* e non \mathbb{P} . A noi sarebbe bastato partire da uno spazio misurabile (Ω, \mathcal{F}) equipaggiato con una filtrazione (\mathcal{F}_n) ed una misura equivalente a \mathbb{P} . In altre parole conoscere l'insieme dei possibili stati e l'evoluzione dell'informazione nel tempo è sufficiente. Appena questi ci vengono forniti noi non abbiamo bisogno della *vera* misura di probabilità per valutare un'opzione.

Nel prossimo capitolo, grazie al modello di Cox-Ross-Rubinstein, metteremo in pratica la teoria appena sviluppata e questa osservazione sarà più chiara.

Capitolo 3

Modello di Cox-Ross-Rubinstein

3.1 Descrizione del modello

Il modello di Cox-Ross-Rubinstein (CRR) è una versione particolare del modello esposto nel capitolo precedente. In effetti possiamo affermare che è la versione a tempo discreto del modello di Black-Scholes. Esso è costituito solamente da due attivi finanziari: un attivo privo di rischio e uno con rischio. Per semplificare le notazioni da ora in poi identificheremo il valore dell'attivo senza rischio al tempo n con B_n , il quale sta per "Bond", obbligazione. E identificheremo il valore dell'attivo con rischio con S_n , che sta per "Stock", azione. Assumiamo che il rendimento dell'obbligazione dopo un'unità di tempo sia costante e uguale ad r , quindi ricordando quanto detto nel secondo capitolo si ha

$$B_n = (1 + r)^n$$

Il valore iniziale dell'azione S_0 è dato. Mentre al tempo $n \geq 1$ esso sarà

$$S_n = \begin{cases} S_{n-1} \cdot u \\ S_{n-1} \cdot d \end{cases}$$

dove d e u sono due numeri reali tali che $0 < d < u$. Introduciamo le variabili aleatorie $T_n = S_n/S_{n-1}$, per $n = 1, \dots, N$. T_n è a valori in $\{d, u\}$, quindi l'insieme dei possibili stati è $\Omega = \{d, u\}^N$, dove ogni N -pla rappresenta i successivi valori del rapporto S_n/S_{n-1} per $n = 1, \dots, N$. Assumiamo inoltre che $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_N = \mathcal{P}(\Omega)$. Per $n = 1, \dots, N$ la σ -algebra \mathcal{F}_n è uguale a $\sigma(S_1, \dots, S_n)$, la σ -algebra generata dalle variabili aleatorie S_1, \dots, S_n . Ricordiamo che si richiede che \mathbb{P} sia strettamente positiva su qualsiasi elemento di Ω . Se (x_1, \dots, x_N) è un elemento di Ω , allora $\mathbb{P}\{(x_1, \dots, x_N)\} = \mathbb{P}(T_1 = x_1, \dots, T_N = x_N)$. Per cui conoscere \mathbb{P} è equivalente a conoscere la distribuzione della N -pla (T_1, \dots, T_N) . Evidenziamo inoltre che per $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(T_1, \dots, T_n)$.

A questo punto dimostriamo delle proposizioni, alcune molto semplici, che caratterizzano il modello di CRR.

Proposizione 3.1. *Il valore attualizzato \tilde{S}_n è una martingala sotto \mathbb{P}^* se e solo se $\mathbb{E}^*[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$, per ogni $n \in \{0, 1, \dots, N\}$.*

Dimostrazione. L'uguaglianza $\mathbb{E}^*[\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \tilde{S}_n$ è equivalente a $\mathbb{E}^*[\tilde{S}_{n+1}/\tilde{S}_n|\mathcal{F}_n] = 1$, dato che \tilde{S}_n è \mathcal{F}_n -misurabile. A questo punto l'ultima uguaglianza è equivalente a $\mathbb{E}^*[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$ quindi abbiamo concluso. \square

Proposizione 3.2. *Il rendimento $(1 + r)$ deve appartenere all'intervallo $]d, u[$ affinché il mercato sia privo di arbitraggio.*

Dimostrazione. Dal secondo capitolo sappiamo che se il mercato è N.A. allora esiste una probabilità \mathbb{P}^* , equivalente a \mathbb{P} , sotto la quale (\tilde{S}_n) è una martingala. Ora, per la proposizione 3.1,

$$\mathbb{E}^*[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$$

quindi $\mathbb{E}^*[T_{n+1}] = 1 + r$. Dato che T_{n+1} è uguale a d o u con probabilità diversa da 0, allora si ha necessariamente che $(1 + r) \in]d, u[$. \square

Proposizione 3.3. *Assumiamo che $(1 + r) \in]d, u[$ e chiamiamo $\tilde{p} = ((1 + r) - d)/(u - d)$. Allora (\tilde{S}_n) è una \mathbb{P}^* -martingala se e solo se le variabili aleatorie T_1, T_2, \dots, T_n sono indipendenti e identicamente distribuite (IID) e la loro distribuzione è data da: $\mathbb{P}^*(T_1 = u) = \tilde{p} = 1 - \mathbb{P}^*(T_1 = d)$.*

Dimostrazione. (\Leftarrow) Se le T_i sono indipendenti e soddisfano $\mathbb{P}^*(T_1 = u) = \tilde{p} = 1 - \mathbb{P}^*(T_1 = d)$, abbiamo

$$\mathbb{E}^*[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}^*[T_{n+1}] = \tilde{p}u + (1 - \tilde{p})d = 1 + r$$

e quindi (\tilde{S}_n) è una \mathbb{P}^* -martingala per la proposizione 3.1.

(\Rightarrow) Viceversa, se per $n = 0, 1, \dots, N$ $\mathbb{E}^*[T_{n+1}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$ noi possiamo scrivere

$$d \cdot \mathbb{E}^*[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=d\}}|\mathcal{F}_n] + u \cdot \mathbb{E}^*[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=u\}}|\mathcal{F}_n] = 1 + r$$

Allora, la seguente uguaglianza

$$\mathbb{E}^*[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=d\}}|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}^*[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=u\}}|\mathcal{F}_n] = 1$$

implica che $\mathbb{E}^*[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=u\}}|\mathcal{F}_n] = \tilde{p}$ e $\mathbb{E}^*[\mathbb{1}_{\{T_{n+1}=d\}}|\mathcal{F}_n] = (1 - \tilde{p})$. Per induzione su n è facile provare che per $x_i \in \{d, u\}$

$$\mathbb{P}^*(T_1 = x_1, \dots, T_n = x_n) = \prod_{i=1}^n p_i$$

dove $p_i = \tilde{p}$ se $x_i = u$ e $p_i = 1 - \tilde{p}$ se $x_i = d$. Questo dimostra che le variabili aleatorie T_i sono IID sotto la misura \mathbb{P} e che $\mathbb{P}^*(T_i = u) = \tilde{p}$. \square

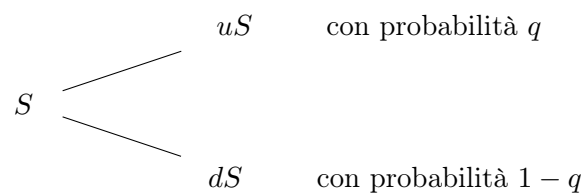
Osservazione 3.4. Quindi se $(1+r) \in]d, u[$ e se le variabili T_1, \dots, T_n sono IID con distribuzione $\mathbb{P}^*(T_1 = u) = \tilde{p} = 1 - \mathbb{P}^*(T_1 = d)$ possiamo concludere che il mercato è privo di arbitraggio e completo. Questo perché come abbiamo visto tali ipotesi identificano la probabilità \mathbb{P}^* sotto cui (\tilde{S}_n) è una martingala. Ma a sua volta una qualsiasi misura di probabilità per la quale (\tilde{S}_n) è una martingala determina univocamente la distribuzione delle T_1, \dots, T_n come sopra. Quindi tale probabilità è unica e per il teorema 2.17 abbiamo la tesi.

3.2 Valutare e replicare un'opzione

Arrivati a questo punto ci siamo fatti un'idea di come è strutturato il modello di CRR e conosciamo alcune sue caratteristiche. Tuttavia non abbiamo ancora parlato di come fare effettivamente a valutare un'opzione, o di come trovare esplicitamente una strategia replicante. Per fare questo partiamo dal caso più semplice possibile: il modello ad un periodo.

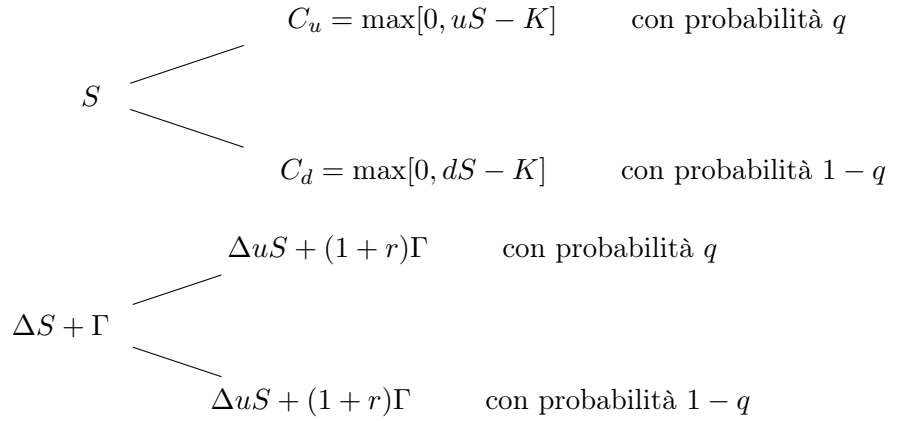
3.2.1 Modello ad un periodo

Nel paragrafo precedente non abbiamo mai fatto uso della proprietà reale dell'attivo con rischio, abbiamo solo detto che quest'ultima è strettamente positiva su qualsiasi elemento di Ω . Questo non ci dovrebbe stupire, dopotutto nel secondo capitolo avevamo già annunciato che essa è del tutto irrilevante per i nostri scopi. Tuttavia per mettere in maggior luce questo fatto, ora per la prima volta essa verrà assegnata. Quindi diremo che il tasso di rendimento della nostra azione durante un qualsiasi periodo potrà assumere due valori: $u - 1$ con probabilità q , oppure $d - 1$ con probabilità $1 - q$. In un modello ad un solo periodo questo è rappresentato dal diagramma



Ora, sia C il valore corrente di una *call*. C_u il suo valore alla fine del periodo se il prezzo dell'azione è "salito" a uS e C_d il suo valore se il prezzo dell'azione è "sceso" a dS . Dato il prezzo di esercizio dell'opzione K e visto che la scadenza è dopo un singolo periodo di tempo, si avrà che $C_u = \max[0, uS - K]$ e $C_d = \max[0, dS - K]$. Quindi

Supponiamo di formare un portafoglio contenente Δ quote dell'azione e l'ammontare Γ in obbligazioni. Utilizzando le notazioni del capitolo precedente abbiamo $\phi_0 = (\Gamma, \Delta)$. Tale portafoglio avrà un valore al tempo 0 di $\Delta S + \Gamma$. E dopo un periodo il suo valore sarà



Dato che stiamo cercando una strategia replicante vogliamo che il valore del nostro portafoglio eguagli quello dell'opzione al tempo 1. Quindi cerchiamo Δ e Γ tali che

$$\begin{cases} \Delta uS + (1+r)\Gamma = C_u \\ \Delta dS + (1+r)\Gamma = C_d \end{cases}$$

Risolvendo il sistema troviamo

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} \quad \Gamma = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)} \quad (3.1)$$

Quindi con Δ e Γ scelti in questo modo riusciamo a replicare l'opzione. Ora, dimenticandoci di quanto detto all'inizio di questo capitolo e in quello precedente, cerchiamo di fare alcuni ragionamenti riguardo al prezzo della call al tempo 0.

Iniziamo osservando che per avere assenza di arbitraggio, il valore corrente dell'opzione, C , non deve essere minore del valore corrente del portafoglio replicante, $\Delta S + \Gamma$. Se così fosse noi potremmo avere dei profitti senza rischio e senza aver fatto nessun investimento comprando la call e vendendo il portafoglio. E non può essere nemmeno maggiore, altrimenti avremmo un'opportunità di arbitraggio invertendo la procedura, vendendo l'opzione e comprando il portafoglio. In conclusione, perché il mercato sia privo di arbitraggio dobbiamo avere che

$$C = \Delta S + \Gamma = \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)} = \left[\left(\frac{(1+r)-d}{u-d} \right) C_u + \left(\frac{u-(1+r)}{u-d} \right) C_d \right] / (1+r)$$

A questo punto osservando l'ultimo termine ci accorgiamo che abbiamo ritrovato la misura di probabilità \tilde{p} , che ricordiamo essere

$$\tilde{p} = \frac{(1+r)-d}{u-d}$$

Per semplicità e per alleggerire le notazioni, da ora in poi identificheremo la probabilità \tilde{p} con la sola lettera p .

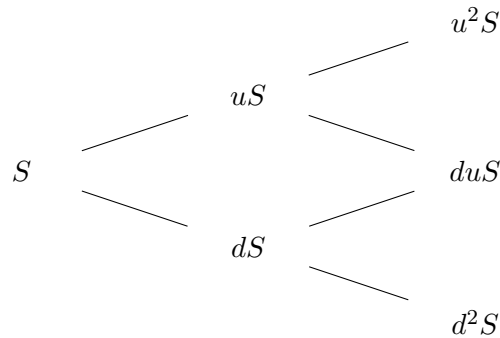
L'aver ritrovato la probabilità p non ci deve stupire, come abbiamo visto nei paragrafi precedenti C non è altro che la speranza sotto p del valore attualizzato del portafoglio alla scadenza

$$C = [pC_u + (1 - p)C_d]/(1 + r) \quad (3.2)$$

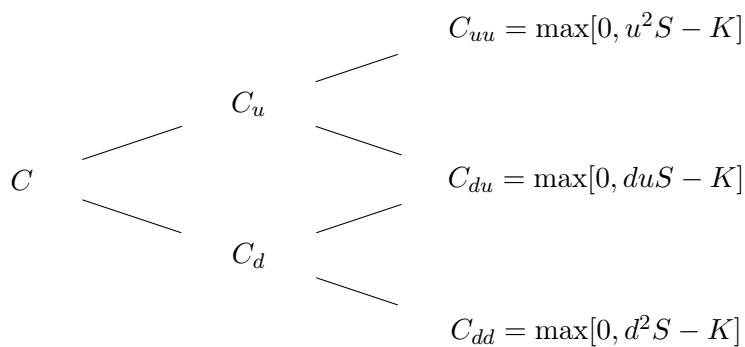
Abbiamo quindi trovato una formula chiusa per il calcolo del prezzo di un'opzione con scadenza dopo un solo periodo. Osserviamo che come avevamo già anticipato la probabilità q non appare in tale formula. Essa è del tutto irrilevante. Sotto un aspetto finanziario questo significa che un investitore, pur sapendo che il valore dell'azione ha maggiore probabilità di salire o scendere, è tenuto a seguire la strategia dettatagli dal portafoglio replicante se non vuole essere causa di arbitraggio.

3.2.2 Modello multiperiodale

Consideriamo ora la situazione subito successiva: il modello a due periodi. In questo caso un'azione può assumere tre differenti valori trascorsi due periodi



Similmente il valore di una call sarà dato da



dove C_{uu} rappresenta il valore di una call dopo due periodi se il valore dell'azione è salito in ognuno di essi; C_{du} e C_{dd} hanno definizioni analoghe.

A questo punto per valutare l'opzione approfitteremo della seguente osservazione: alla fine del periodo corrente ne rimarrà uno solo, quindi noi ci ritroveremo nuovamente nella

condizione analizzata nel paragrafo precedente. Per cui, applicando un ragionamento a ritroso, per evitare che ci siano opportunità di arbitraggio dovremo avere

$$C_u = [pC_{uu} + (1-p)C_{ud}]/(1+r)$$

e

$$C_d = [pC_{du} + (1-p)C_{dd}]/(1+r)$$

Ora non rimane che calcolare il valore dell'opzione al tempo 0 sostituendo nell'equazione 3.2 i nuovi valori di C_u e C_d , tenendo conto che $C_{ud} = C_{du}$.

$$C = \frac{pC_u + (1-p)C_d}{1+r} = \frac{p^2C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2C_{dd}}{(1+r)^2}$$

Ed ancora un volta troviamo che C è il valore atteso del prezzo attualizzato dell'opzione alla scadenza.

Abbiamo quindi trovato una procedura ricorsiva per valutare una call. Partendo dalla data di scadenza ci muoviamo all'indietro valutando volta per volta l'opzione al tempo $n-1$. Possiamo quindi finalmente enunciare la formula generale per valutare un prodotto derivato con scadenza al tempo N e prezzo di esercizio K :

$$C = \left[\sum_{j=0}^N \left(\frac{N!}{j!(N-j)!} \right) p^j (1-p)^{N-j} \max[0, u^j d^{N-j} S - K] \right] / (1+r)^N$$

E' facile scorgere in tale formula il valore atteso di una variabile aleatoria di tipo binomiale. Abbiamo quindi trovato la formula chiusa per calcolare il prezzo di un'opzione al tempo 0, tuttavia con un altro piccolo sforzo possiamo esprimere quest'ultima in una forma più conveniente.

Sia a il minimo numero di movimenti verso l'alto che il prezzo dell'azione deve fare nei prossimi N periodi affinché la call finisca con avere un valore maggiore di 0. Quindi a sarà il minimo intero positivo tale che $u^a d^{N-a} S > K$. Ora prendendo il logaritmo naturale di entrambi i termini della disuguaglianza, noi possiamo riscrivere a come il più piccolo intero positivo più grande di

$$\frac{\log\left(\frac{K}{d^N S}\right)}{\log\left(\frac{u}{d}\right)}$$

Per cui, per ogni $j < a$

$$\max[0, u^j d^{N-j} S - K] = 0$$

e per ogni $j \geq a$

$$\max[0, u^j d^{N-j} S - K] = u^j d^{N-j} S - K$$

Quindi otteniamo che

$$C = \left[\sum_{j=a}^N \left(\frac{N!}{j!(N-j)!} \right) p^j (1-p)^{N-j} [u^j d^{N-j} S - K] \right] / (1+r)^N$$

Chiaramente se $a > N$ la call avrà un valore finale pari a 0 anche se il prezzo dell'azione salisse durante ogni periodo, perciò il suo valore corrente deve essere 0.

Ora raccogliendo diversamente i termini di C troviamo

$$C = S \left[\sum_{j=a}^N \left(\frac{N!}{j!(N-j)!} \right) p^j (1-p)^{N-j} \left(\frac{u^j d^{N-j}}{(1+r)^N} \right) \right] - K(1+r)^{-N} \left[\sum_{j=a}^N \left(\frac{N!}{j!(N-j)!} \right) p^j (1-p)^{N-j} \right]$$

Osserviamo che l'ultima espressione tra parentesi è la funzione di distribuzione binomiale complementare $\psi[a; N, p]$. Inoltre persino la prima espressione tra parentesi può essere interpretata come una funzione di distribuzione binomiale complementare $\psi[a; N, p']$, dove

$$p' \equiv \left(\frac{u}{(1+r)} \right) p \quad \text{e} \quad 1-p' \equiv \left(\frac{d}{(1+r)} \right) (1-p)$$

p' è una probabilità, dato che $0 < p' < 1$. Infatti si può notare che $p < (r/u)$ e

$$p^j (1-p)^{N-j} \left(\frac{u^j d^{N-j}}{(1+r)^N} \right) = \left[\frac{u}{(1+r)} p \right]^j \cdot \left[\frac{d}{(1+r)} (1-p) \right]^{N-j} = p'^j (1-p')^{N-j}$$

Ed ora possiamo finalmente concludere con la formula riscritta nel modo più semplice possibile:

$$C = S\psi[a; N, p'] - K(1+r)^{-N}\psi[a; N, p]$$

dove

$$p \equiv \frac{(1+r)-d}{u-d} \quad \text{e} \quad p' \equiv \frac{u}{1+r} p$$

a è il più piccolo intero positivo maggiore di $\log(K/d^N S)/\log(u/d)$

e se $a > N$ allora $C = 0$

Nel prossimo capitolo vedremo come approssimare la formula di Black-Scholes introdotta all'inizio con la formula appena trovata.

Capitolo 4

Passaggio al limite

Il motivo principale per cui abbiamo introdotto il modello di Cox-Ross-Rubinstein è la sua semplicità. Esso ci permette di simulare un mercato finanziario e di trovare una formula chiusa per valutare un prodotto derivato con delle basi matematiche elementari. Tuttavia ora ci chiediamo se questa sua semplicità non sia un limite. Dal momento che abbiamo assunto il tempo come discreto siamo portati a pensare ad un singolo periodo come un'unità di tempo ben fissata, ad esempio un giorno. Ora proprio a causa di questo potrebbero sorgere due obiezioni. La prima è che il prezzo di un'azione dopo un giorno può assumere ben più di due soli valori. E la seconda è che il mercato non è aperto solo una volta al giorno, anzi al contrario non è quasi mai chiuso e in ogni momento avvengono transazioni e i valori degli attivi cambiano.

Queste obiezioni sono certamente valide, ma grazie alla versatilità di tale modello vedremo che con delle modifiche riusciremo a ovviare a tali problemi. Come abbiamo detto è abbastanza naturale pensare ad ogni unità come un giorno, ma questa non è una scelta obbligata. Avremmo potuto prendere un periodo molto più piccolo, come un minuto od un secondo. Così facendo vedremo che riusciremo a trovare una soluzione capace di risolvere entrambe le obiezioni. Il mercato risulterà come se fosse sempre aperto e alla fine di un giorno una qualsiasi azione avrà la possibilità di assumere centinaia di valori.

Per fare ciò dovremo apportare alcune modifiche. Infatti noi vogliamo che il prezzo di un'azione dopo un singolo minuto abbia una bassa probabilità di variare molto. Cioè noi non vogliamo che il prezzo possa salire o scendere di un determinato valore e in un determinato periodo con la stessa probabilità nel caso esso sia un minuto o un giorno. E dopotutto noi non abbiamo bisogno di usare gli stessi valori. Ad esempio potremmo stabilire che dopo ogni singolo periodo il valore di un'azione vari di una percentuale veramente piccola.

Quindi, rendiamo tutto questo più formale. Supponiamo che h rappresenti la lunghezza di ogni periodo, cioè il tempo trascorso tra due cambiamenti successivi nel valore di un'azione. Se T è la grandezza temporale legata alla scadenza dell'opzione e N il

numero di periodi di lunghezza h prima dell'espiazione, allora

$$h \equiv \frac{T}{N}$$

Più le transazioni avverranno frequentemente e più h tenderà a 0. A questo punto dovremo aggiustare le variabili dipendenti dall'intervallo, r , u , d e q , in modo da ottenere risultati realistici quando $h \rightarrow 0$.

Fino ad ora abbiamo considerato r come il rendimento costante di un'obbligazione dopo una singola unità di tempo. Tuttavia, ora che abbiamo introdotto h e abbiamo marcato la distinzione tra il singolo periodo, dopo il quale il prezzo di un'azione può cambiare, e la più grande grandezza temporale T , è bene introdurre un nuovo termine. Quindi, da ora in poi considereremo r come il tasso di rendimento di una obbligazione dopo una fissata grandezza temporale, ad esempio un giorno. E chiameremo \hat{r} il tasso di rendimento dopo un singolo periodo di lunghezza h . Chiaramente \hat{r} dipenderà dal numero di sottointervalli N in cui T è suddiviso. Quindi dopo n periodi il rendimento totale di un'obbligazione sarà dato dal fattore moltiplicativo $(1 + \hat{r})^n$. Vogliamo inoltre che \hat{r} dipenda da N in un modo particolare, infatti vogliamo che anche se N varia il rendimento totale $(1 + \hat{r})^N$ al tempo T rimanga lo stesso. Questo perché il tasso di interesse ottenibile dopo una fissata unità di tempo non deve aver nulla a che fare con la lunghezza h di ogni intervallo. Per cui, se r (senza il cappuccio) denota il tasso di rendimento dopo un'unità di tempo fissata, passato il tempo T il rendimento totale di un'obbligazione sarà $(1 + r)^T$. Osserviamo che questa grandezza non dipende da N . Quindi, per quanto è stato detto, imporremo che

$$(1 + \hat{r})^N = (1 + r)^T$$

per ogni scelta di N . Dunque si avrà che $(1 + \hat{r}) = (1 + r)^{T/N}$. Quest'ultima uguaglianza mostra come \hat{r} deve dipendere da N .

Adesso dobbiamo definire u , d e q in termini di N e in base alla definizione che daremo otterremo due risultati molto differenti. Infatti per $h \rightarrow 0$, o equivalentemente per $N \rightarrow \infty$, in un caso otterremo un processo stocastico continuo e nell'altro un processo stocastico a salti. Nella prima situazione piccoli cambiamenti casuali nel valore dell'azione avverrebbero dopo ogni piccolo periodo. Il prezzo dell'attivo così fluttuerebbe incessantemente e la sua traiettorie potrebbe essere disegnata senza mai staccare la penna dal foglio. Al contrario, nel secondo caso, il valore dell'azione seguirebbe delle traiettorie generalmente lisce ma interrotte occasionalmente da dei cambiamenti discontinui. Come abbiamo detto entrambi possono essere derivati dal nostro processo binomiale semplicemente scegliendo come u , d e q dipendono da N . Noi esamineremo solo il primo caso, il quale conduce alla formula di Black-Scholes vista nel primo capitolo.

Ora, facendo qualche passo indietro, ricordiamo che abbiamo supposto che ad ogni passo il valore della nostra azione abbia un incremento di un fattore u con probabilità q , o di un fattore d con probabilità $1 - q$. Consideriamo una possibile sequenza di cinque movimenti, ad esempio u, d, u, u, d . Se il valore della nostra azione subisse tali rialzi e tali ribassi, a questo punto esso sarebbe $S_5 = udvudS$; Vogliamo studiare il fattore

$S_5/S = u^3 d^2$ e per fare ciò vedremo che sarà utile prendere in esame il suo logaritmo naturale, $\log(S_5/S) = 3 \log u + 2 \log d$. Più generalmente, dopo n periodi avremo

$$\log(S_n/S) = j \log u + (n - j) \log d = j \log(u/d) + n \log d$$

dove j è il numero (casuale) di rialzi occorsi durante gli n periodi. Dunque, il valore atteso della variabile aleatoria $\log(S_n/S)$ è

$$\mathbb{E}[\log(S_n/S)] = \log(u/d) * \mathbb{E}[j] + n \log d$$

e la sua varianza è

$$\text{Var}[\log(S_n/S)] = [\log(u/d)]^2 * \text{Var}[j]$$

La variabile aleatoria j non è altro che una binomiale $B(n, q)$. Infatti ognuno dei possibili n rialzi ha probabilità q di accadere. Per cui $\mathbb{E}[j] = nq$ e $\text{Var}[j] = nq(1-q)$. Combinando tutto questo troviamo

$$\mathbb{E}[\log(S_n/S)] = [q \log(u/d) + \log d]n \equiv \hat{\mu}n$$

$$\text{Var}[\log(S_n/S)] = q(1 - q)[\log(u/d)]^2 n \equiv \hat{\sigma}^2 n$$

Torniamo al nostro problema. Quello che noi vogliamo fare è dividere il nostro intervallo di tempo $[0, T]$ in un numero sempre maggiore di sottointervalli di lunghezza h . Come abbiamo già detto in precedenza e com'è intuibile, se noi lasciassimo i nostri parametri costanti mentre N diventa sempre più grande andremmo in contro a dei risultati poco veritieri. Infatti non otterremmo di certo una conclusione ragionevole se sia $\hat{\mu}N$ che $\hat{\sigma}^2 N$ tendessero a zero o all'infinito mentre N cresce. Dato che T è una grandezza temporale ben fissata, rappresenta la scadenza della nostra opzione, noi vorremmo che u , d e q dipendessero in qualche modo da lei. Quello che faremo sarà imporre che la media e la varianza della nostra variabile $\log(S_N/S)$ tenda per $N \rightarrow \infty$ ad un valore stabilito. Supponiamo di conoscere la media e la varianza empirica del prezzo della nostra azione alla scadenza diviso il prezzo iniziale e chiamiamo questi due valori rispettivamente μT e $\sigma^2 T$. Allora sceglieremo u , d e q tali che per $N \rightarrow \infty$

$$[q \log(u/d) + \log d]N \rightarrow \mu T$$

$$q(1 - q)[\log(u/d)]^2 N \rightarrow \sigma^2 T$$

Con un poco di algebra si può dimostrare che i seguenti valori soddisfano la nostra richiesta

$$u = e^{\sigma \sqrt{T/N}}, \quad d = e^{-\sigma \sqrt{T/N}}, \quad q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\mu/\sigma)\sqrt{T/N}$$

In questo caso, per ogni N ,

$$\hat{\mu}N = \mu T \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}^2 N = [\sigma^2 - \mu^2(T/N)]T$$

Chiaramente, per $N \rightarrow \infty$, $\hat{\sigma}^2 N \rightarrow \sigma^2 T$ e $\hat{\mu}N = \mu T$ per ogni N .

Tutto questo rispetta le nostre richieste, i valori limite di media e varianza coincidono, tuttavia dobbiamo verificare che così facendo la variabile $\log(S_N/S)$ acquisisca al limite una distribuzione di probabilità consistente. La media e la varianza descrivono solo certi aspetti di tale distribuzione.

Analizziamo un attimo la variabile aleatoria $\log(S_N/S)$: date le ipotesi del nostro modello essa è la somma di N variabili aleatorie indipendenti, ognuna delle quali può assumere il valore $\log u$ con probabilità q o il valore $\log d$ con probabilità $(1 - q)$. Siamo interessati alla distribuzione di tale somma quando N tende a più infinito e i parametri u , d e q sono scelti come descritto sopra. Puntualizziamo che al variare di N noi non stiamo semplicemente aggiungendo una variabile aleatoria alla precedente somma, ma stiamo cambiando persino la probabilità e i possibili risultati di ogni membro della sommatoria. A questo punto possiamo avvalerci di una variante del teorema del limite centrale, la quale applicata al nostro problema ci dice che per $N \rightarrow \infty$, se

$$\frac{q|\log u - \hat{\mu}|^3 + (1 - q)|\log d - \hat{\mu}|^3}{\hat{\sigma}^3\sqrt{N}} \rightarrow 0$$

allora

$$\mathbb{P}\left[\left(\frac{\log(S_N/S) - \hat{\mu}N}{\hat{\sigma}\sqrt{N}}\right) \leq h\right] \rightarrow Z(h)$$

dove $Z(h)$ è la funzione di ripartizione della normale standard. In poche parole questo significa che come il numero di periodi in cui è suddiviso l'intervallo $[0, T]$ tende all'infinito, la probabilità che la variabile aleatoria $\log(S_N/S)$ standardizzata sia minore del numero reale h è uguale alla probabilità sotto una distribuzione normale standard.

Possiamo verificare che la condizione iniziale è soddisfatta facendo le appropriate sostituzioni e osservando che

$$\frac{q|\log u - \hat{\mu}|^3 + (1 - q)|\log d - \hat{\mu}|^3}{\hat{\sigma}^3\sqrt{N}} = \frac{(1 - q)^2 + q^2}{\sqrt{N}q(1 - q)}$$

il quale tende a 0 per $N \rightarrow \infty$, dato che $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\mu/\sigma)\sqrt{T/N}$.

Così possiamo effettivamente concludere che la variabile aleatoria $\log(S_N/S)$, per $N \rightarrow \infty$, mantiene una distribuzione di probabilità consistente. E in particolare possiamo affermare che il nostro modello binomiale moltiplicativo del prezzo di un'azione ha una distribuzione lognormale nel passaggio al limite.

Come abbiamo visto nel primo capitolo, Fischer Black e Myron Scholes nel loro modello supposero fin dall'inizio la continuità delle traiettorie del valore dell'azione nell'intervallo $[0, T]$ e la distribuzione lognormale del prezzo alla scadenza. Quindi, ora che abbiamo visto come entrambe le caratteristiche appartengono al caso limite del nostro modello, non ci rimane che mostrare che la formula di Cox-Ross-Rubinstein coincide realmente con quella di Black-Scholes al limite. Comunque è importante ricordare che entrambi i modelli, sia quello di CRR che quello di BSM, si basano sulle stesse basi economiche, ad esempio l'assenza di arbitraggio nel mercato e la sua completezza. E noi non saremmo potuti arrivare a tali risultati se così non fosse stato.

Passiamo quindi alla dimostrazione:

Ricordiamo sia la formula di BS, riscritta con la notazione usata in questi ultimi capitoli, sia la formula di CRR:

Formula di Black-Scholes

$$C = SZ(x) - K(1+r)^{-T} Z(x - \sigma\sqrt{T})$$

dove

$$x \equiv \frac{\log(S/K(1+r)^{-T})}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

Formula di Cox-Ross-Rubinstein

$$C = S\psi[a; N, p'] - K(1+\hat{r})^{-N}\psi[a; N, p]$$

dove

$$p \equiv \frac{(1+\hat{r}) - d}{u - d} \quad \text{e} \quad p' \equiv \frac{u}{1+\hat{r}p}$$

e

a è il più piccolo intero positivo maggiore di $\log(K/d^N S)/\log(u/d)$

Le somiglianze sono subito evidenti. Chiaramente \hat{r}^{-N} è uguale a r^{-T} . Dunque, per mostrare che le due formule convergono a noi basta far vedere che per $N \rightarrow \infty$

$$\psi[a; N, p'] \rightarrow Z(x) \quad \text{e} \quad \psi[a; N, p] \rightarrow Z(x - \sigma\sqrt{T})$$

Considereremo solo $\psi[a; N, p]$, dato che la dimostrazione è esattamente la stessa per $\psi[a; N, p']$.

La funzione di distribuzione binomiale complementare $\psi[a; N, p]$ è la probabilità che la somma di N variabili aleatorie indipendenti, ognuna delle quali assume il valore 1 con probabilità p e 0 con probabilità $(1-p)$, sia maggiore o uguale ad a . Sappiamo che il valore casuale di questa somma, j , ha media Np e deviazione standard $\sqrt{Np(1-p)}$. Dunque

$$1 - \psi[a; N, p] = \mathbb{P}(j \leq a - 1) = \mathbb{P}\left(\frac{j - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} \leq \frac{a - 1 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}\right)$$

Ora riprendiamo un attimo quanto detto in precedenza. Se consideriamo il prezzo di un'azione, il quale dopo ogni periodo si muoverà verso l'alto, uS , con probabilità p , o verso il basso, dS , con probabilità $(1-p)$, allora $\log(S_N/S) = j \log(u/d) + n \log d$. E la sua media e la sua varianza abbiamo visto essere

$$\hat{\mu}_p = p \log(u/d) + \log d \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_p^2 = p(1-p)[\log(u/d)]^2$$

Utilizzando queste due uguaglianze troviamo che

$$\frac{j - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} = \frac{\log(S_N/S) - \hat{\mu}_p N}{\hat{\sigma}_p \sqrt{N}}$$

Consideriamo ora il numero reale a e osserviamo che

$$a - 1 = \frac{\log(K/Sd^N)}{\log(u/d)} - \epsilon = \frac{[\log(K/S) - N \log d]}{\log(u/d)} - \epsilon$$

dove ϵ è un numero reale appartenente all'intervallo $(0, 1]$. Usando questo e le definizioni di $\hat{\mu}_p$ e $\hat{\sigma}_p^2$, con un poco di algebra, otteniamo

$$\frac{a - 1 - Np}{\sqrt{Np(1-p)}} = \frac{\log(K/S) - \hat{\mu}_p N - \epsilon \log(u/d)}{\hat{\sigma}_p \sqrt{N}}$$

E mettendo insieme tutti questi risultati

$$1 - \psi[a; N, p] = \mathbb{P}\left(\frac{\log(S_N/S) - \hat{\mu}_p N}{\hat{\sigma}_p \sqrt{N}} \leq \frac{\log(K/S) - \hat{\mu}_p N - \epsilon \log(u/d)}{\hat{\sigma}_p \sqrt{N}}\right)$$

Siamo ora nella condizione di poter applicare la variante del teorema del limite centrale. Prima però dobbiamo verificare se la condizione iniziale,

$$\frac{p|\log u - \hat{\mu}_p|^3 + (1-p)|\log d - \hat{\mu}_p|^3}{\hat{\sigma}_p^3 \sqrt{N}} = \frac{(1-p)^2 + p^2}{\sqrt{Np(1-p)}} \rightarrow 0$$

per $N \rightarrow \infty$, è soddisfatta. Ricordiamo che $p \equiv \frac{(1+\hat{r})-d}{u-d}$ e che $(1+\hat{r}) = (1+r)^{T/N}$, $u = e^{\sigma\sqrt{T/N}}$ e $d = e^{-\sigma\sqrt{T/N}}$. Ora è possibile mostrare che per $N \rightarrow \infty$

$$p \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\log(1+r) - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \right) \sqrt{\frac{T}{N}}$$

Dunque, la condizione iniziale è soddisfatta e noi possiamo applicare il teorema del limite centrale.

Analizziamo ora i termini $\hat{\mu}_p N$, $\hat{\sigma}_p^2 N$ e $\log(u/d)$ per $N \rightarrow \infty$. Sostituendo nelle definizioni di $\hat{\mu}$ e di $\hat{\sigma}^2$ il valore limite di p si vede facilmente che

$$\hat{\mu}_p N \rightarrow \left(\log(1+r) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_p^2 N \rightarrow \sigma^2 T$$

Mentre

$$\log\left(\frac{u}{d}\right) = 2\sigma\sqrt{\frac{T}{N}} \rightarrow 0$$

Unendo tutte queste osservazioni troviamo

$$\frac{\log(K/S) - \hat{\mu}_p N - \epsilon \log(u/d)}{\hat{\sigma}_p \sqrt{N}} \rightarrow h = \frac{\log(K/S) - \left(\log(1+r) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

e quindi

$$1 - \psi[a; N, p] \rightarrow Z(h) = Z\left(\frac{\log(K(1+r)^{-T}/S)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right)$$

Il passo finale è utilizzare la simmetria della distribuzione normale standard per cui $1 - Z(h) = Z(-h)$. Dunque, per $N \rightarrow \infty$

$$\psi[a; N, p] \rightarrow Z(-h) = Z\left(\frac{\log(S/K(1+r)^{-T})}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right) = Z(x - \sigma\sqrt{T})$$

Ed ora, dato che gli stessi argomenti valgono per $\psi[a; N, p']$, questo conclude la nostra dimostrazione. Nel passaggio al limite la formula binomiale per il calcolo del prezzo delle opzioni include la formula di Black-Scholes.

Capitolo 5

Sperimentazioni numeriche

In questo capitolo mostreremo alcuni risultati numerici legati all'approssimazione di Cox-Ross-Rubinstein alle formule di Black-Scholes. Indagheremo su di alcuni fenomeni particolari e parleremo del metodo Monte Carlo applicato al nostro modello.

Per tutte queste sperimentazioni ci siamo serviti del software statistico R.

5.1 Convergenza lognormale

Innanzitutto ricordiamo che nel modello di CRR il processo che determina il prezzo di un'azione è di tipo discreto moltiplicativo. Abbiamo quindi pensato di partire simulando l'andamento di una traiettoria di tale processo. Per fare ciò abbiamo utilizzato i parametri forniteci dal capitolo precedente, cioè: fissata la data di scadenza T (nei programmi verrà utilizzata la lettera "t" poiché la lettera "T", maiuscola, in R sta per TRUE), il numero N di sottointervalli, il tasso di interesse dei bond $1 + r$ (per semplicità nei programmi scriveremo solo "r"), la volatilità σ (nei programmi indicheremo con "ds" la volatilità σ , mentre con "V" la volatilità al quadrato) e il prezzo iniziale dell'azione S allora avremo che gli incrementi u e d sono

$$u = e^{\sigma\sqrt{T/N}} \quad e \quad d = e^{-\sigma\sqrt{T/N}}$$

Mentre il tasso di interesse di ogni singolo periodo (nei programmi denotato con "r_hat") è dato da

$$(1 + \hat{r}) = (1 + r)^{T/N}$$

Inoltre supporremo che il nostro processo stocastico sia guidato dalla probabilità rischio neutro (nei programmi "p_neutral") che sappiamo essere

$$p = \frac{(1 + \hat{r}) - d}{u - d}$$

A questo punto riportiamo il grafico della simulazione di 30 traiettorie. Abbiamo supposto che l'unità temporale sia un giorno.

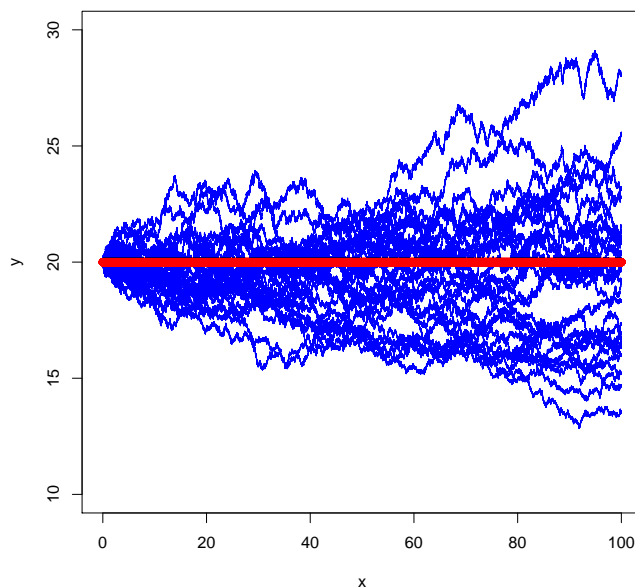


Figura 5.1: 30 traiettorie. $T = 100$, $N = 100000$, $(1 + r) = 1.0001$, $\sigma^2 = 0.1/365$, $S = 20$

Nel quarto capitolo abbiamo dimostrato che la variabile S_N/S tende ad una lognormale. Più precisamente, sotto la probabilità rischio neutro, essa tende ad una lognormale di parametri $((\log(1+r) - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma\sqrt{T})$. Abbiamo voluto verificare sperimentalmente tale fatto e per farlo abbiamo utilizzato il metodo di Monte Carlo.

Il metodo Monte Carlo (MC) è un metodo stocastico per il calcolo numerico di quantità deterministiche. L'idea è la seguente: supponiamo di voler calcolare una quantità α e che α si possa rappresentare come la media di una variabile aleatoria X .

$$\alpha = \mathbb{E}[X]$$

Ovviamente stiamo supponendo di lavorare su di un opportuno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dove $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ integrabile. Indichiamo con Λ la distribuzione di X e immaginiamo di avere $\{X^q\}_q$ una successione di v.a. indipendenti tutte con legge Λ . Se ora supponiamo che X sia di quadrato integrabile, allora per la legge dei grandi numeri si ha

$$\hat{\alpha}_Q := \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q X^q \rightarrow \mathbb{E}[X] \quad \text{per } Q \rightarrow \infty$$

Dunque, un modo per approssimare α è quello di calcolare la media empirica di un buon numero di v.a. indipendenti con distribuzione uguale a quella di X .

Riportiamo di seguito il grafico di due istogrammi creati seguendo il concetto tale metodo. Infatti per generarli abbiamo agito in questo modo: abbiamo prima simulato un numero Z di traiettorie e poi di queste è stato considerato solo il valore finale (esso rappresenta il prezzo dell'azione alla scadenza). Infine abbiamo plottato l'istogramma del valore $Y = \log(S_N/S)$. Inoltre abbiamo aggiunto al grafico due linee. La linea rossa rappresenta la funzione di densità di una normale con media e deviazione standard date dal campione sperimentale. La linea blu invece rappresenta la funzione di densità di una normale con media $(\log(1+r) - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ e deviazione standard $\sigma\sqrt{T}$. Cioè la densità della variabile aleatoria a cui dovrebbe tendere la nostra variabile lognormale.

Come si può vedere i grafici confermano ciò che avevamo detto, le due linee hanno lo

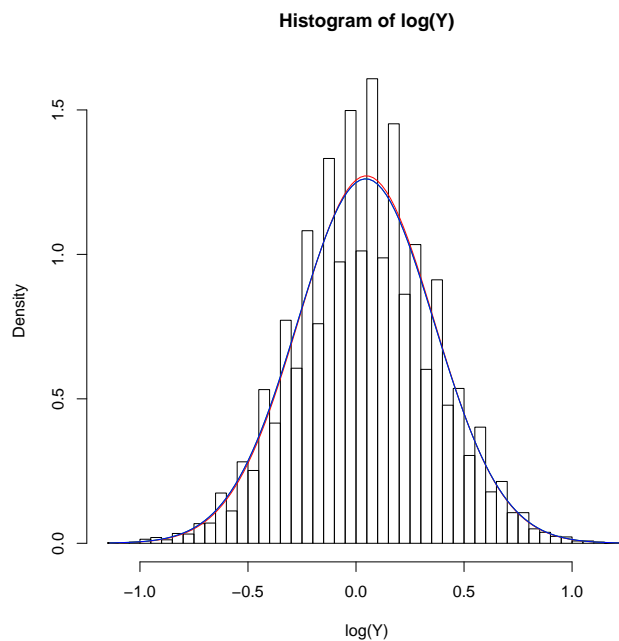


Figura 5.2: $Z = 10000$, $T = 1$, $N = 1000$, $(1+r) = 1.1$, $\sigma^2 = 0.1$

stesso andamento e sono molto vicine. Nel secondo grafico si ha addirittura che la linea blu nasconde quella rossa. Tuttavia osserviamo che nel primo grafico si hanno due aspetti alquanto curiosi. Il primo è che si hanno delle punte centrali ben più alte delle due linee e il secondo è che al contrario si hanno persino delle punte che con regolarità stanno al di sotto di queste. Entrambi gli aspetti sono dovuti al fatto che stiamo lavorando con un processo stocastico discreto. Infatti essendo N limitato il prezzo finale dell'azione può assumere solo un numero finito di valori, per cui è impossibile che esso salga sopra (o rispettivamente scenda sotto) una determinata soglia. Quindi i valori saranno concentrati all'interno di queste due soglie e ciò spiega come mai ci siano questi picchi più alti e come mai la linea rossa sia al di sopra della linea blu. Riguardo ai picchi più bassi la causa è la stessa. Abbiamo detto che il prezzo può assumere solamente un determinato numero

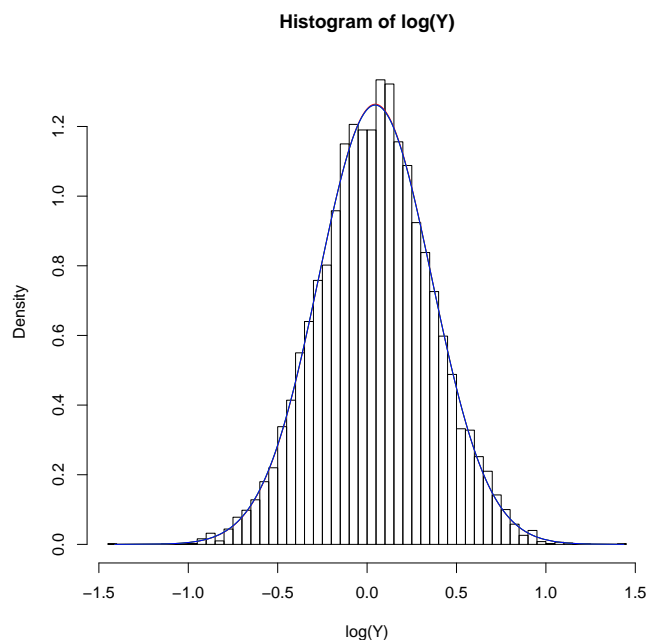


Figura 5.3: $Z = 10000$, $T = 1$, $N = 10000$, $(1 + r) = 1.1$, $\sigma^2 = 0.1$

di valori e ognuno di questi "apparterrà" ad un blocco dell'istogramma. E' possibile trovare dei casi come questo in cui ci sono blocchi che contengono più valori e altri che ne contengono meno (fare attenzione qui: l'altezza del blocco non è data da quanti valori contiene ma da quante traiettorie alla scadenza hanno assunto i valori contenuti in tale blocco). Per questo motivo i blocchi con più valori avranno una maggiore probabilità di essere alti rispetto a quelli con meno blocchi. Tali osservazioni sono in parte confermate dal secondo grafico, infatti per risolvere i due problemi, legati alla discretizzazione, è ovvio che si debba aumentare il valore di N . E vediamo che così facendo abbiamo ottenuto un risultato ben più soddisfacente.

5.2 Convergenza metodo Monte Carlo

Passiamo ora alla sperimentazione numerica successiva. Utilizzando le notazioni degli ultimi due capitoli abbiamo visto che il prezzo di un'opzione è dato da

$$C = (1 + r)^{-T} \mathbb{E}^* [\max[0, (S(T) - K)^+]]$$

dove il valore atteso è calcolato secondo la misura di probabilità rischio neutro. Ora, dato che questo implica il calcolo di un integrale, viene naturale pensare di poterlo fare con il metodo Monte Carlo. E' vero che noi abbiamo già due formule, quella di BS e quella di CRR, che fanno questo rispettivamente nel caso continuo e nel caso discreto, tuttavia

ci sono casi nella realtà in cui le variabili in gioco sono moltissime e noi non siamo in grado di trovare una formula chiusa per risolvere quell'integrale. Da qui l'importanza del metodo Monte Carlo: se siamo in grado di simulare le traiettorie dei prezzi allora possiamo stimare il valore dell'opzione.

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, noi siamo in grado di generare tali traiettorie, quindi abbiamo pensato di studiare la convergenza del metodo. Prima però osserviamo che l'approssimazione che troveremo tramite il metodo MC non sarà della formula di BS ma sarà del valore della formula di CRR. Infatti se le traiettorie simulate dal metodo MC sono composte da N sottointervalli allora noi stiamo approssimando l'integrale

$$C = (1 + r)^{-T} \mathbb{E}^* [\max[0, (S_N - K)^+]]$$

A questo punto riportiamo il grafico che mostra il valore assoluto dell'errore commesso dall'approssimazione MC rispetto alla formula di CRR al variare del numero Z di traiettorie simulate. Z appartiene all'intervallo $[Z_min, Z_max]$ e assume i soli valori $Z = Z_min + g * (\lfloor (Z_max - Z_min) / 20 \rfloor)$ con $g = 0, \dots, 20$. Come si può vedere dal

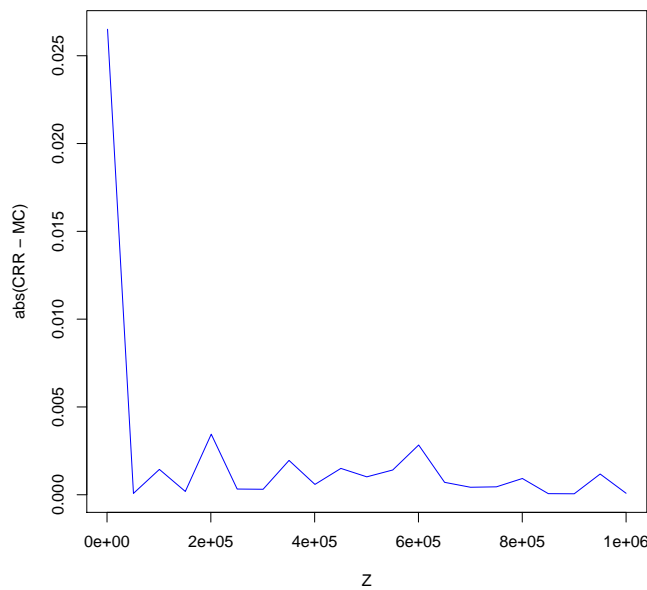


Figura 5.4: $Z_min = 1000$, $Z_max = 100000$, $T = 1$, $N = 500$, $(1 + r) = 1.001$, $\sigma^2 = 0.5/365$, $S = 20$, $K = 19$

grafico si intuisce che c'è convergenza, ma che allo stesso tempo questa è estremamente lenta. Siamo arrivati a simulare addirittura un milione di traiettorie eppure non si hanno risultati soddisfacenti. L'andamento dell'errore continua ad essere altalenante. Ma questo non deve sorprenderci, è risaputo che tra i difetti del metodo MC si ha la sua lenta convergenza. Riprendendo le notazioni usate nel paragrafo precedente vediamo il perché.

Possiamo studiare la velocità di convergenza del metodo grazie al teorema del limite centrale che riportiamo nella seguente utile versione

$$\sqrt{Q}(\hat{\alpha}_Q - \alpha) \xrightarrow{L} N(0, COV)$$

dove il simbolo \xrightarrow{L} denota la convergenza in legge, $N(0, COV)$ è la gaussiana su \mathbb{R}^d di media 0 e matrice di covarianza COV e COV è la matrice di covarianza associata al vettore aleatorio $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$. Ora per Q sufficientemente grande vale la seguente approssimazione

$$\hat{\alpha}_Q \cong \alpha + \frac{1}{\sqrt{Q}}(COV)^{1/2}H$$

con H v.a gaussiana standard su \mathbb{R}^d . Ciò significa che l'errore aleatorio che si compie approssimando α con $\hat{\alpha}_Q$ è dell'ordine $\frac{1}{\sqrt{Q}}(COV)^{1/2}H$. Per cui l'ordine di convergenza del metodo Monte Carlo è del tipo $1/\sqrt{Q}$, cioè: è molto lento. Ciò nonostante ci teniamo a sottolineare che il metodo è estremamente flessibile ed inoltre, come abbiamo appena visto la velocità di convergenza è indipendente dalla dimensione d . Per cui, come abbiamo annunciato all'inizio del paragrafo, ciò è molto utile quando le variabili in gioco sono talmente tante da non riuscire a trovare una formula chiusa per il calcolo del prezzo di un'opzione.

5.3 Codice programmi

Riportiamo di seguito il codice dei programmi usati per plottare i grafici di quest'ultimo capitolo. Seguono lo stesso ordine dei grafici, cioè la prima funzione è servita a creare il primo grafico e così via.

Prima funzione: qui simuliamo Z traiettorie del processo dei prezzi dell'azione e ne plottiamo l'andamento:

```
#traiettorie <- function (Z, t, N, r, V, S) {

  nome=paste("traiettorie",date(),Z,t,N,r,V,S,".pdf")

  pdf(nome)

  ds=sqrt(V)
  u=exp(ds*sqrt(t/N))
  d=exp(-ds*sqrt(t/N))
  r_hat=r^(t/N)
  p_neutral=(r_hat-d)/(u-d)

  x=seq(0,t,t/N)

  y=1:N+1
  y[1]=S

  for (i in 1:N) {
    y[i+1]=y[i]*exp(2*(rbinom(1,1,p_neutral)-0.5)*ds*sqrt(t/N))
  }
  plot(x,y, ylim=c(10,30), type="l", col=4)

  for(j in 1:(Z-1)) {
    for (i in 1:N) {
      y[i+1]=y[i]*exp(2*(rbinom(1,1,p_neutral)-0.5)*ds*sqrt(t/N))
    }
    lines(x,y, type="l", col=4)
  }

  for(i in 1:N) y[i+1]=S
  lines(x,y, type="p", col=2)

  dev.off()
}
```

#Seconda funzione: qui creiamo l'istogramma della variabile $\log(S(N)/S)$

```
istogramma <- function (Z, t, N, V, R, S, blocchi=100) {

  nome=paste("istogramma",date(),Z,t,N,V,R,S,blocchi,".pdf")

  pdf(nome)

  ds=sqrt(V)
  u=exp(ds*sqrt(t/N))
  d=exp(-ds*sqrt(t/N))
  r_hat=R^(t/N)
  p_neutral=(r_hat-d)/(u-d)

  Y=1:Z
  i=rbinom(Z,N,p_neutral)
  for (j in 1:Z) Y[j]= S*(u^(i[j]))*(d^(N-i[j]))

  hist(log(Y),blocchi,FALSE)
  Y.ord=sort(log(Y))
  Y2=dnorm(Y.ord,mean(log(Y)),sd(log(Y)))
  # Curva della gaussiana con media e varianza sperimentali
  lines(Y.ord,Y2, col=2) # rosso
  Y2=dnorm(Y.ord,mean= (log(R)-0.5*(ds^2))*t ,sd= ds*sqrt(t) )
  # Curva della gaussiana con media e varianza uguali al limite
  lines(Y.ord,Y2, col=4) # blu

  dev.off()
}
```

#Terza funzione: qui plottiamo l'errore commesso dal metodo Monte Carlo nell'approssimare la formula di CRR al variare di N.

```
velox_MC <- function (Z_min, Z_max, t, N, V, R, S, K, passi=20) {

  nome=paste("velox_MC",date(),Z_min,Z_max,t,N,V,R,S,K,passi,".pdf")
```

```

pdf(nome)

ds=sqrt(V)
u=exp(ds*sqrt(t/N))
d=exp(-ds*sqrt(t/N))
r_hat=R^(t/N)
p_neutral=(r_hat-d)/(u-d)

a=ceiling((log(K/(S*d^N)))/(log(u/d)))
CRR=S*(1-pbinom(a,N,(u/r_hat)*p_neutral))-(r_hat^(-N))*K*(1-pbinom(a,N,p_neutral))

x=(log(S*(R^t)/K))/(ds*sqrt(t))+ds*sqrt(t)/2
BS=S*pnorm(x)-(R^(-t))*K*pnorm(x-ds*sqrt(t))

MC=1:(passi+1)

passo=(Z_max-Z_min)/passi
for (g in 1:(passi+1)) {

  Y=1:ceiling(Z_min+(g-1)*passo)
  i=rbinom(ceiling(Z_min+(g-1)*passo),N,p_neutral)
  for (j in 1:ceiling(Z_min+(g-1)*passo)) {
    Y[j]= max (0, S*(u^(i[j]))*(d^(N-i[j]))-K)
  }

  MC[g]=(mean(Y))/(R^t)
}

Z=seq(Z_min,Z_max,passo)

plot(Z , abs(CRR-MC), type="l", col=4)#blu

dev.off()
}

```


Bibliografia

- [1] J. C. Cox, S. A. Ross, M. Rubinstein - *Option Pricing: A Simplified Approach*. Journal of Financial Economics, 1979.
- [2] T. Björk - *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford Finance, 2009.
- [3] D. Lamberton, B. Lapeyre - *Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall/CRC, 2000.