CdL in Matematica, Istituzioni di Probabilità (773AA)

A.A. 2023/24 - Appello del 2024-06-25

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (in generale), fornendo giustificazioni adeguate.

1. Se $(X_t)_{t\in[0,1]}$ è un processo stocastico a valori reali a incrementi indipendenti, anche il processo $Y_t := X_{1-t}$ per $t \in [0,1]$ lo è.
2. Se $(M_t)_{t\geq 0}$ è una martingala locale continua tale che $\langle M, M\rangle_\infty < \infty$ $\mathbb{P}$-q.c., allora esiste $\mathbb{P}$-q.c. il limite $\lim_{t\to\infty} M_t$.
3. Se $(p_t)_{t\geq 0}$ è la funzione di transizione di un processo Feller $(X_t)_{t\geq 0}$ tale che esistano stati $x, y \in E$ per cui $p_t(x, \{y\}) = 0$ per ogni $t \geq 0$, allora il tempo d'arresto $\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t = y\}$ è infinito P_x-q.c. (ossia rispetto alla legge del processo con misura iniziale concentrata in x).

Una soluzione:

1. Vera: gli incrementi di Y_t sono uguali agli incrementi di X (a meno di cambiare segno).

2. Vera: A meno di tempi d'arresto possiamo supporre che $\langle M, M\rangle_\infty \leq n$. In tal caso la martingala è una martingala vera in H^2 e quindi il limite esiste.

3. Falsa: il moto browniano fornisce un controesempio.

Problema 2

Sia $(B_t)_{t\geq 0}$ un moto browniano reale. Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dX_t = X_t\left(\frac{1}{2}\left(1+B_t^2\right)dt + B_t dB_t\right) & \text{per } t \geq 0, \\ X_0 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

1. Mostrare che il processo $Y_t = \exp\left(B_t^2/2\right)$ è una soluzione dell'equazione.
2. Mostrare vale l'unicità per traiettorie: se X risolve l'equazione, allora $X_t = Y_t$ per ogni $t \geq 0$, $\mathbb{P}$-q.c.
3. Per ogni $p \geq 1$, determinare il più piccolo tempo (deterministico) $t(p) \geq 0$ tale che $X_t \notin L^p(\mathbb{P})$.
4. Mostrare che per $t \in [0, t(1))$ il processo X_t è una submartingala.
5. Dire se il limite $\lim_{t\to\infty} X_t$ esiste $\mathbb{P}$-q.c. (eventualmente ∞).

Una soluzione:

1. Posto $H_t = B_t^2/2$ si ha $dH_t = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt$, quindi $d\langle H, H\rangle_t = B_t^2 dt$ e per la formula di Ito con $f(x) = \exp(x)$ troviamo

$$df(H_t) = f(H_t)(B_t dB_t + \frac{1}{2}dt) + \frac{1}{2}f(H_t)B_t^2 dt, \tag{2}$$

che è la tesi.

2. Poniamo $Z_t = X_t/Y_t = X_t \exp(-H_t)$ con la notazione di prima. Per la formula di Itô con $f(x, y) = xy$, troviamo

$$\begin{aligned}
dZ_t &= dX_t \exp(-H_t) + X_t d\exp(-H_t) + dX_t d\exp(-H_t) \\
&= X_t \exp(-H_t)\left(\frac{1}{2}\left(1 + B_t^2\right)dt + B_t dB_t\right) \\
&\quad + X_t\left(-\exp(-H_t)dH_t + \frac{1}{2}\exp(-H_t)B_t^2 dt\right) \\
&\quad - X_t \exp(-H_t)B_t^2 dt \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

da cui $Z_t = 1$ per ogni $t \geq 0$, ossia $X_t = Y_t$ come richiesto.

3. Si ha $\mathbb{E}\left[\exp\left(pB_t^2/2\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(ptZ^2/2\right)\right] < \infty$ dove Z è gaussiana standarda se e solo se $pt < 1$, ossia $t < 1/p$, quindi $t(p) = 1/p$.

4. Poiché B_t è martingala, quindi $B_t^2/2$ è submartingala (è funzione convessa di martingala) e quindi poiché $\exp(\cdot)$ è convessa crescente segue che X_t è submartingala (purché integrabile).

5. Poiché $\limsup_{t\to\infty} B_t = \infty$, $\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty$, abbiamo che per infiniti t si ha $B_t = 0$, quindi $\exp(0) = 1$ è punto di accumulazione. D'altra parte anche ∞ lo è e quindi il limite non può esistere.