CdL in Matematica, Istituzioni di Probabilità (773AA)

A.A. 2022/23 - Appello del 2023-09-15

La durata della prova è di **150 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (in generale), fornendo giustificazioni adeguate (se non altrimenti specificato, considerare sempre le filtrazioni naturali).

1. Se $(X_t)_{t\geq 0}$ è un processo di Markov (non necessariamente omogeneo) rispetto ad una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, a valori in uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$, allora anche il processo $(X_{t^2})_{t\geq 0}$ è di Markov rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_{t^2})_{t\geq 0}$.
2. Un processo reale gaussiano a traiettorie continue $B = (B_t)_{t\geq 0}$ è un moto browniano se e solo se, per ogni $a > 0$ la legge del processo $(aB_{t/a^2})_{t\geq 0}$ coincide con quella di B.
3. Se il processo $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ è una martingala rispetto ad una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$, anche il processo $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$ dato da
$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$
è una martingala rispetto alla stessa una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$.
4. Se $B = (B_t)_{t\geq 0}$, $M = (M_t)_{t\geq 0}$ sono due moti Browniani, rispetto ad una medesima filtrazione che soddisfa le ipotesi abituali, e tra di loro indipendenti, allora vale
$$B_t M_t = \int_0^t B_s dM_s + \int_0^t M_s dB_s, \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Una soluzione:

1. Vera. Basta scrivere la definizione di processo di Markov e usare il fatto che la funzione $t \mapsto t^2$ è strettamente crescente.

2. Falsa. Infatti il processo $X_t = 0$ identicamente per ogni $t \geq 0$ soddisfa le condizioni richieste ma non è un moto Browniano.

3. Falsa. Basta considerare il moto Browniano osservato nei tempi naturali, $X_n = B_n$. Si tratta di una martingala, ma il processo $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B_i$ non è una martingala. Infatti se lo fosse gli incrementi dovrebbero essere ortogonali, ma si verifica ad esempio che
$$\mathbb{E}\left[(Y_3 - Y_2)Y_2\right] \neq 0.$$

4. Vera. Infatti abbiamo visto a lezione che per due martingale locali continue indipendenti si ha $[B, M] = 0$ e quindi l'identità segue dalla formula di Itô.

Problema 2

Siano $a = \operatorname{Re} a + i \operatorname{Im} a, \sigma = \operatorname{Re} \sigma + i \operatorname{Im} \sigma \in \mathbb{C}$ due parametri complessi, e si consideri l'equazione differenziale stocastica a valori in $\mathbb{C}$ (identificato con $\mathbb{R}^2$)

$$\begin{cases} dZ_t &= Z_t(adt + \sigma dB_t) \quad \text{per } t \geq 0, \\ Z_0 &= z_0 \end{cases} \tag{1}$$

dove $B = \operatorname{Re} B + i \operatorname{Im} B$ è un moto browniano complesso, ossia la parte reale e la parte immaginaria sono moti browniani reali indipedenti, $z \in \mathbb{C}$, e i prodotti sopra sono intesi tra numeri complessi. In particolare, si ha

$$\sigma dB_t = ((\operatorname{Re}\sigma)(d \operatorname{Re} B_t) - (\operatorname{Im}\sigma)(d \operatorname{Im} B_t)) + i\left((\operatorname{Re}\sigma)(d \operatorname{Im} B_t) + (\operatorname{Im}\sigma)(d \operatorname{Re} B_t)\right).$$

1. Dire se si applicano le condizioni del teorema di esistenza e unicità per traiettorie (tipo Cauchy-Lipschitz) visto nel corso.
2. Mostrare che il processo a valori complessi

$$Z_t = z_0 \exp\left(\left(a - |\sigma|^2/2\right) t + \sigma B_t\right)$$

   è soluzione del problema, dove $|\cdot|$ indica il modulo di un numero complesso.
3. Mostrare che vale $\mathbb{E}\left[|Z_t|\right] \leq |z_0| e^{t \operatorname{Re} a}$ per ogni $t \geq 0$.
4. Mostrare che, se $\operatorname{Re} a < 0$, allora $\lim_{t\to\infty} Z_t$ esiste $\mathbb{P}$-q.c. (in $\mathbb{C}$), mentre se $\operatorname{Re} a = 0$, allora $\lim_{t\to\infty} Z_t$ non necessariamente esiste $\mathbb{P}$-q.c.

Una soluzione:

1. Le condizioni si applicano perché $z \mapsto az$ e $z \mapsto \sigma z$ (viste come mappe da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$) sono lineari quindi globalmente Lipschitz.

2. Si tratta di applicare la formula di Itô (nel caso vettoriale) e verificare che il processo proposto risolve l'equazione.

3. Partendo dalla formula del punto precedente e usando il fatto che $|e^u| = e^{\operatorname{Re} u}$ per $u \in \mathbb{C}$, segue che

$$|Z_t| = |z_0| \exp\left(\operatorname{Re} at - \frac{1}{2}|\sigma|\right) \exp\left((\operatorname{Re}\sigma)(\operatorname{Re} B_t) - (\operatorname{Im}\sigma)(\operatorname{Im} B_t)\right).$$

Passando al valore atteso e usando il fatto che $\operatorname{Re} B_t$ $\operatorname{Im} B_t$ sono gaussiane indipendenti e quindi

$$(\operatorname{Re}\sigma)(\operatorname{Re} B_t) - (\operatorname{Im}\sigma)(\operatorname{Im} B_t) = U$$

ha legge gaussiana reale centrata di varianza $|\sigma|^2 t$ otteniamo che

$$\mathbb{E}\left[|Z_t|\right] = |z_0| \exp\left(\operatorname{Re} at - \frac{1}{2}|\sigma|\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}|\sigma|^2 t\right) = |z_0| \exp\left(\operatorname{Re} at\right).$$

4. Per il punto precedente abbiamo che $\mathbb{E}\left[|Z_t|\right] \leq |z_0| e^{t \operatorname{Re} a} \to 0$ per $t \to \infty$. Inoltre l'espressione trovata sopra per $|Z_t|$ mostra che è una supermartingala (di tipo esponenziale). Perciò la convergenza verso 0 è anche $\mathbb{P}$-q.c.

Se invece supponiamo $\operatorname{Re} a = 0$, non è più necessariamente convergente. Infatti basta prendere $a = i$, $\sigma = 0$ e $z_0 = 1$ in modo che $Z_t = e^{it}$ (deterministica) che ovviamente non converge per $t \to \infty$.