CdL in Matematica, Istituzioni di Probabilità (773AA)

A.A. 2022/23 - Appello del 2023-07-21

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (in generale), fornendo giustificazioni adeguate (se non altrimenti specificato, considerare sempre le filtrazioni naturali).

1. Esiste un processo di Markov e gaussiano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che *non* ha incrementi indipendenti.
2. Sia $(B_s)_{s\geq 0}$ un moto browniano reale e sia $(h_s)_{s\geq 0}$ una funzione (deterministica) boreliana tale che $\int_0^t h_s^2 ds < \infty$ per ogni $0 \leq t < \infty$. Allora il processo $M_t = \int_0^t h_s dB_s$ è una martingala uniformemente integrabile se e solo se $\int_0^\infty h_s^2 ds < \infty$.
3. Se $(B_t)_{t\geq 0}$ è un moto browniano reale, allora la variabile aleatoria

$$\tau := \sup\{t \geq 0 \,:\, B_t = 0\}$$

è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione del moto browniano completata con gli insiemi trascurabili di $\sigma(B_t \,:\, t \geq 0)$.

Una soluzione:

1. Vera. Abbiamo visto nel corso il processo di Ornstein-Uhlenbeck $(X_t)_{t\geq 0}$ che è gaussiano, di Markov ma non ha incrementi indipendenti. Basta quindi considerare $(X_n)_{n=0}^\infty$. In alternativa, si può definire l'analogo a tempi discreti tramite un'equazione alle differenze finite: ad esempio

$$\begin{cases} X_n - X_{n-1} &= -X_{n-1} + Z_n, \\ X_0 &= 0 \end{cases}$$

dove Z_n sono variabili gaussiane standard indipendenti. La proprietà di Markov è evidente, perché X_n dipende dalla storia precedente solo tramite X_{n-1}. Inoltre il fatto che sia gaussiano segue dal fatto che $(X_i)_{i=0}^n$ è una opportuna funzione lineare delle $(Z_i)_{i=1}^n$ per ogni n. Infine gli incrementi non sono indipendenti: basta calcolare la covarianza tra $X_2 - X_1 = -Z_1 + Z_2$ e $X_1 - X_0 = Z_1$, e si trova -1.

2. Vera. Sappiamo dalla teoria generale che $M_t = \int_0^t h_s dB_s$ è una martingala locale, ma essendo h deterministico è inoltre un processo gaussiano, di media 0 e varianza $< M >_t = \int_0^t h_s^2 ds$. Per un noto criterio visto nel corso, se $\mathbb{E}\left[< M >_\infty\right] < \infty$ allora M è in H^2 e in particolare uniformemente integrabile. Se pertanto assumiamo che $\int_0^\infty h_s^2 ds < \infty$, segue che $\mathbb{E}\left[< M >_\infty\right] = \int_0^\infty h_s^2 ds < \infty$, quindi M è uniformemente integrabile. Viceversa, se M è uniformemente integrabile, allora

è limitata in L^1. Essendo variabili gaussiane, si ha per una qualche costante $c > 0$ che

$$\mathbb{E}\left[|M_t|\right] = c\sqrt{\int_0^t h_s^2 ds}$$

e quindi $\sup_{t<\infty} \int_0^t h_s^2 ds$ è uniformemente limitato, ossia $\int_0^\infty h_s^2 ds < \infty$.

3 Vera. Infatti sappiamo che $\mathbb{P}$-q.c. $\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty$, $\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty$ e quindi essendo le traiettorie del moto browniano continue si ha $\tau = \infty$ $\mathbb{P}$-q.c., che banalmente verifica la definizione di tempo d'arresto (avendo aggiunto gli insiemi trascurabili).

Problema 2

Sia $\sigma \in \mathbb{R}$ un parametro. Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dX_t &= X_t^3 dt + X_t^2 \sigma dB_t \quad \text{per } t \geq 0, \\ X_0 &= x \end{cases} \tag{1}$$

dove B è un moto browniano reale e $x \in \mathbb{R}$.

1. Dire se si applicano le condizioni del teorema di esistenza e unicità per traiettorie (tipo Cauchy-Lipschitz) visto nel corso.
2. Mostrare che se $x = 0$ allora il processo $X_t = 0$ per ogni $t \geq 0$ è l'unica soluzione dell'equazione. *(Sugg: considerare $X^2_{t\wedge\eta_\varepsilon}$ dove $\eta_\varepsilon = \inf\{s \geq 0 \,:\, |X_s| > \varepsilon\}$)*
3. Per ogni $M > 0$, si indichi con $(X_t^M)_{t\geq 0}$ la soluzione dell'equazione differenziale stocastica
$$\begin{cases} dY_t &= \left(f_M(Y_t)\right)^3 dt + \left(f_M(Y_t)\right)^2 \sigma dB_t \\ Y_0 &= x, \end{cases}$$
dove $f_M(y) = \max\{-M, \min\{M, y\}\}$ (dire perché X^M esiste unica). Posto
$$\tau_M := \inf\left\{t \geq 0 \,:\, \left|X_t^M\right| > M\right\},$$
mostrare che X^M, arrestata a τ_M, risolve l'equazione (1) arrestata a τ_M, ossia:
$$X^M_{t\wedge\tau_M} = x + \int_0^{t\wedge\tau_M} (X_s^M)^3 ds + \sigma \int_0^{t\wedge\tau_M} (X_s^M)^2 dB_s \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$
4. Con la notazione del punto precedente, fissato $x \neq 0$, si mostri che se $\sigma^2 < 2/3$ allora $\tau_M < \infty$ $\mathbb{P}$-q.c. *(Sugg: considerare $(X_t^M)^{-2}$)*

Una soluzione:

1. Le condizioni non si applicano perché $x \mapsto x^3$ e $x \mapsto x^2$ non sono globalmente Lipschitz (hanno crescita più che lineare).

2. Chiaramente il processo $X_t = 0$ è una soluzione se $x = 0$. Per verificare che è l'unica, si supponga che X_t sia una soluzione e si ponga come da suggerimento

$$\eta_\varepsilon := \inf \{t \geq 0 : |X_t| > \varepsilon\} \tag{2}$$

Il processo X arrestato a η_ε soddisfa l'equazione per $t \leq \eta_\varepsilon$ e per la formula di Itô si trova che, per $t \leq \eta_\varepsilon$,

$$dX_t^2 = 2X_t dX_t + \sigma^2 X_t^4 dt = (2 + \sigma^2) X_t^4 dt + 2\sigma X_t^3 dB_t \tag{3}$$

Scrivendo in forma integrale, otteniamo

$$X_{t\wedge\eta_\varepsilon}^2 = (2 + \sigma^2) \int_0^{t\wedge\eta_\varepsilon} X_s^4 d + 2\sigma \int_0^{t\wedge\eta_\varepsilon} X_s^3 dB_s \tag{4}$$

Poiché $|X_t| \leq \varepsilon$ per $t \leq \eta_\varepsilon$, l'ultimo termine è una martingala vera e quindi passando al valore atteso si trova

$$\mathbb{E}\left[X_{t\wedge\eta_\varepsilon}^2\right] = (2 + \sigma^2)\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\eta_\varepsilon} X_s^4 ds\right] \leq (2 + \sigma^2)\varepsilon^2 \int_0^t \mathbb{E}\left[X_{s\wedge\eta_\varepsilon}^2\right] ds. \tag{5}$$

Per il lemma di Gronwall si ottiene che

$$\mathbb{E}\left[X_{t\wedge\eta_\varepsilon}^2\right] = 0, \tag{6}$$

quindi $\eta_\varepsilon > t$, $\mathbb{P}$-q.c. per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $t > 0$. Considerando ε e t razionali segue che $\eta_\varepsilon = \infty$ per ogni $\varepsilon > 0$ ossia $X_t = 0$ $\mathbb{P}$-q.c.

3. Per ogni $M > 0$, l'equazione ha coefficienti Lipschitz continui e limitati, quindi le ipotesi del teorema visto nel corso garantiscono esistenza e unicità (per traiettorie e in legge) della soluzione X^M. D'altra parte, per $t \leq \tau_M$ abbiamo che $|X_t^M| \leq M$, quindi $f^M(X_t^M) = X_t^M$, quindi scrivendo l'equazione in forma integrale otteniamo quanto richiesto.

Una soluzione:

4. Seguendo il suggerimento, poniamo anche

$$\eta_\varepsilon := \inf \{t \geq 0 : |X_t| = \varepsilon\} \tag{7}$$

e applichiamo la formula di Itô a $(X_t^M)^{-2}$, per $t \leq \eta_\varepsilon \wedge \tau_M$. Si trova

$$\begin{aligned} d(X_t^M)^{-2} &= -2(X_t^M)^{-3} dX_t^M + \frac{1}{2}(-2)(-3)(X_t^M)^{-4} d < X^M >_t \\ &= -2(X_t^M)^{-3}((X_t^M)^3 dt + \sigma(X_t^M)^2 dB_t) + 3\sigma^2 (X_t^M)^{-4}(X_t^M)^4 dt \\ &= (-2+3\sigma^2)dt + +\sigma(X_t^M)^{-1} dB_t \end{aligned} \tag{8}$$

Le ipotesi implicano che $|X_t^M|^{-1} \leq \varepsilon^{-1}$ per $t \leq \eta_\varepsilon \wedge \tau_M$, e quindi il secondo termine definisce una martingala vera.

Passando al valore atteso troviamo

$$\mathbb{E}\left[(X^M_{t\wedge\eta_\varepsilon\wedge\tau_M})^{-2}\right] = x^{-2} + (-2+3\sigma^2)\mathbb{E}\left[t \wedge \eta_\varepsilon \wedge \tau_M\right]. \tag{9}$$

al tendere di $\varepsilon \downarrow 0$, si trova che $(X^M_{t\wedge\eta_\varepsilon\wedge\tau_M})^{-2} \to (X^M_{t\wedge\tau_M})^{-2}$ quasi certamente. Per Fatou da un lato e Beppo-Levi dall'altro, segue che

$$\mathbb{E}\left[(X^M_{t\wedge\tau_M})^{-2}\right] \leq x^{-2} + (-2+3\sigma^2)\mathbb{E}\left[t \wedge \tau_M\right]. \tag{10}$$

Supponiamo ora per assurdo che $\tau_M = \infty$ con probabilità positiva. Allora al crescere di $t \uparrow$ si avrebbe $\mathbb{E}\left[t \wedge \tau_M\right] \uparrow \infty$ e in particolare per qualche t risulterebbe che

$$x^{-2} + (-2+3\sigma^2)\mathbb{E}\left[t \wedge \tau_M\right] < 0. \tag{11}$$

Tuttavia il membro a destra in (10) è sempre non-negativo, da cui la contraddizione (in realtà l'argomento mostra che $\mathbb{E}\left[\tau_M\right] \leq x^{-2}/(2-3\sigma^2)$).

CdL in Matematica, Istituzioni di Probabilità (773AA)

A.A. 2022/23 - Appello del 2023-06-06

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (in generale), fornendo giustificazioni adeguate.

1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ chiuso e $(B_s)_{s\geq 0}$ un moto browniano reale. L'insieme

$$\mathcal{Z}_A = \{s \geq 0 \, : \, B_s \in A\}$$

è $\mathbb{P}$-q.c. trascurabile rispetto alla misura di Lebesgue se e solo se A è Lebesgue trascurabile.

2. Se $(X_n)_{n\geq 0}$ è un processo di Markov omogeneo a valori in $\mathbb{N}$ e

$$\tau := \inf\{k \in \mathbb{N} \, : X_k = 0\}$$

allora il processo arrestato a τ, $X_n^\tau = X_{n\wedge\tau}$, è di Markov omogeneo.

3. Sia $(B_s)_{s\geq 0}$ un moto browniano reale. Posta $\operatorname{sign}(x) = \frac{x}{|x|}$ per $x \neq 0$, $\operatorname{sign}(x) = 0$ per $x = 0$, allora vale $\mathbb{P}$-q.c.

$$|B_t| = \int_0^t \operatorname{sign}(B_s) dB_s \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Una soluzione:

1. È vera. Per il teorema di Fubini, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathcal{L}^1(\mathcal{Z}_A)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^\infty I_{\mathcal{Z}_A}(s)ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty I_{B_s\in A}ds\right] \\ &= \int_0^\infty P(B_s \in A)ds.\end{aligned} \tag{1}$$

La condizione "$\mathcal{Z}_A$) è Lebesgue trascurabile" è quindi equivalente al fatto che Lebesgue q.o. $s \in [0,\infty)$, $P(B_s \in A) = 0$. Per questo tuttavia è necessario e sufficiente che per almeno un $s > 0$ si abbia $P(B_s \in A) = 0$, essendo le densità gaussiane strettamente positive ovunque. Ma questo a sua volta equivale al fatto che $\mathcal{L}^1(A) = 0$.

2. L'affermazione è vera. Sia infatti $n \in \mathbb{N}$ e si consideri la probabilità condizionata

$$P(X_{(n+1)\wedge\tau} = i_{n+1} | X_{n\wedge\tau} = i_n, X_{(n-1)\wedge\tau} = i_{n-1}, \ldots, X_{0\wedge\tau} = i_0), \tag{2}$$

dove $(i_k)_{k=0}^{n+1} \in \mathbb{N}$ e supponiamo senza perdita di generalità che

$$P(X_{n\wedge\tau} = i_n, X_{(n-1)\wedge\tau} = i_{n-1}, \ldots, X_{0\wedge\tau} = i_0) > 0. \tag{3}$$

Mostriamo che essa è uguale a

$$P(X_{(n+1)\wedge\tau} = i_{n+1} | X_{n\wedge\tau} = i_n) \tag{4}$$

e inoltre non dipende da n nel senso che

$$P(X_{1\wedge\tau} = i_{n+1} | X_{0\wedge\tau} = i_n). \tag{5}$$

Distinguiamo due casi: se $i_n = 0$, allora per definizione $X_{(n+1)\wedge\tau} = 0$ e quindi

$$P(X_{(n+1)\wedge\tau} = i_{n+1} | X_{n\wedge\tau} = i_n, X_{(n-1)\wedge\tau} = i_{n-1}, \ldots, X_{0\wedge\tau} = i_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } i_{n+1} = 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6}$$

Se invece $i_n \neq 0$, si ha $\tau \geq n+1$ e quindi $X_{k\wedge\tau} = X_k$ per ogni $k \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$ e quindi

$$\begin{aligned} P(X_{(n+1)\wedge\tau} = i_{n+1} | X_{n\wedge\tau} = i_n, X_{(n-1)\wedge\tau} = i_{n-1}, \ldots, X_{0\wedge\tau} = i_0) &= P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) \\ &= P(X_1 = i_{n+1} | X_0 = i_n). \end{aligned} \tag{7}$$

3. L'affermazione è falsa. Infatti il membro a destra essendo l'integrale stocastico di un processo limitato è una martingala vera e quindi il valor medio è nullo, mentre ovviamente a sinistra il valor medio è strettamente positivo. Un altro modo di vedere che l'identità non può valere è di usare il teorema di Levy: il membro a destra definisce (come processo stocastico) un moto browniano, quindi non può essere uguale a quello di sinistra, che è un processo sempre positivo.

Problema 2

Sia $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitz continua e uniformemente limitata, e si consideri l'equazione differenziale stocastica, per $t \geq 0$,

$$\begin{cases} dX_t &= -X_t dt + \sigma(t, X_t) dB_t \\ X_0 &= x \end{cases} \tag{8}$$

dove B è un moto browniano reale e $x \in \mathbb{R}$.

1. Discutere l'esistenza e l'unicita (per traiettorie e in legge) delle soluzioni. Dire se le soluzioni sono forti.
2. Mostrare che $\mathbb{P}$-q.c. vale per ogni $t \geq 0$,
$$X_t = e^{-t} x + e^{-t} \int_0^t e^s \sigma(s, X_s) dB_s.$$
3. Mostrare che $(X_t)_{t\geq 0}$ è uniformemente limitata in $L^2(\mathbb{P})$.

4. Supponendo inoltre che $(s,x) \mapsto e^s\sigma(s,x)$ sia uniformemente limitata, mostrare che $\lim_{t\to\infty} X_t$ esiste $\mathbb{P}$-q.c., e calcolarlo.

Una soluzione:

1. La funzione $f(x) = -x$ è Lipschitz continua, mentre σ è per ipotesi Lipschitz continua e pure uniformemente limitata. Sono quindi rispettate le condizioni del teorema di esistenza e unicità per traiettorie visto nel corso: esiste quindi una soluzione e si ha unicità per traiettorie. Inoltre per il teorema di Yamada-Watanabe, si ha pure unicità in legge e ogni soluzione (con dato iniziale deterministico) è forte.

2. Posta $Y_t = e^t X_t$, applichiamo la formula di Itô (nel caso del prodotto):

$$\begin{aligned} dY_t &= e^t dX_t + X_t e^t dt = -e^t X_t dt + e^t\sigma(t,X_t)dB_t + X_t e^t dt \\ &= e^t\sigma(t,X_t)dB_t, \end{aligned} \tag{9}$$

notiamo che non ci sono termini di covariazione perché e^t è a variazione limitata. Ne segue che

$$e^t X_t = x + \int_0^t e^s\sigma(s,X_s)dB_s, \tag{10}$$

da cui l'identità richiesta, dividendo ambo i membri per e^t.

3. Usiamo l'identità del punto precedente. Notiamo inoltre che essendo $e^s\sigma(s,X_s)$ limitata (se $s \in [0,t]$ e t è fissato), possiamo applicare l'isometria di Itô:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|e^{-t}\int_0^t e^s\sigma(s,X_s)dB_s\right|^2\right] &= e^{-2t}\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{2s}\sigma^2(s,X_s)ds\right] \\ &\leq e^{-2t}\left\|\sigma\right\|_\infty \int_0^t e^{2s}ds = \left\|\sigma\right\|_\infty \int_0^t e^{-2(t-s)}ds \\ &\leq \left\|\sigma\right\|_\infty \int_0^\infty e^{-2s}ds. \end{aligned} \tag{11}$$

Ne segue che $e^{-t}\int_0^t e^s\sigma(s,X_s)dB_s$ è uniformemente limitato in L^2. Il termine $e^{-t}x$ è infinitesimo per $t\to\infty$, quindi anche X_t è uniformemente limitato in L^2.

4. Dato $n \in \mathbb{N}$, usiamo la diseguaglianza di Doob e l'isometria di Itô:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|\sup_{t\leq T}\int_0^t e^s\sigma(s,X_s)dB_s\right|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{2s}\sigma^2(s,X_s)ds\right] \\ &\leq TC, \end{aligned} \tag{12}$$

avendo usato infine l'ipotesi che $e^s\sigma(s,x)$ è uniformemente limitata. Posto $t = n$, segue dalla diseguaglianza di Markov che per ogni $\lambda > 0$,

$$P(\left|\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t e^s\sigma(s,X_s)dB_s\right| > \lambda) \leq \frac{TC}{\lambda^2}. \tag{13}$$

Poniamo $T = n$ ed $\lambda = n^2$, ottenendo così che il membro a destra è sommabile. Per Borel-Cantelli, prima parte, avremo che q.c. definitivamente in n,

$$\left| \sup_{0\le t\le n} \int_0^t e^s \sigma(s, X_s) dB_s \right| \le n^2. \tag{14}$$

Pertanto, per quasi ogni $\omega \in \Omega$, dato t sufficientemente grande la diseguaglianza è vera per $n = \lfloor t \rfloor - 1$. Si ottiene

$$\left| e^{-t} \int_0^t e^s \sigma(s, X_s) dB_s \right| \le e^{-n} \left| \sup_{0\le t\le n+1} \int_0^t e^s \sigma(s, X_s) dB_s \right| \le e^{-n}(n+1)^2 \to 0 \tag{15}$$

per t (e quindi n) che tende a ∞. Insieme al fatto che $e^{-t}x \to 0$, si ottiene la tesi.

CdL in Matematica, Istituzioni di Probabilità (773AA)

A.A. 2022/23 - Appello del 2023-06-06

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, fornendo giustificazioni adeguate.

1. Se un processo stocastico integrabile a valori reali $(X_t)_{t\geq 0}$ ha incrementi indipendenti, allora è una martingala.
2. Se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala non-negativa e $\mathbb{E}[M_0] = 1$, allora $\lim_{n\to\infty}\sqrt{M_n}$ esiste $\mathbb{P}$-q.c. e in $L^1(\mathbb{P})$.
3. Se $(X_n)_{n\geq 0}$ è un processo di Markov e X_n ha legge gaussiana per ogni n, allora è un processo gaussiano.
4. La legge del processo $(B_t - t^{3/4}e^{-t})_{t\geq 0}$ è equivalente a quella di un moto browniano reale $(B_t)_{t\geq 0}$.

Una soluzione:

1. L'affermazione è falsa: infatti è sufficiente considerare il caso di un qualsiasi processo $X_t = x_t$ deterministico ad esempio $x_t = t$, in tal caso gli incrementi sono banalmente indipendenti, ma ad esempio il valor medio $\mathbb{E}[X_t] = x_t$ non è necessariamente costante (condizione necessaria per una martingala)
2. L'affermazione è vera: infatti la martingala è limitata in L^1: essendo positiva, $\mathbb{E}[|M_t|] = \mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0] = 1$, e quindi $\lim_{n\to\infty} M_n$ esiste quasi certamente. Per ottenere il limite in L^1 di $\sqrt{M_n}$, basta notare che la successione $(\sqrt{M_n})_{n=1}^{\infty}$ converge quasi certamente ed è limitata in L^2, quindi uniformemente integrabile: per il teorema di Vitali la convergenza vale anche in L^1.
3. L'affermazione è falsa. Si consideri il seguente esempio (in realtà si può anche fare più semplice): sia X_0 una variabile gaussiana standard, e $(Y_n)_{n\geq 1}$ variabili indipendenti (e indipendenti da X_0) con legge uniforme su $\{-1, 1\}$ e poniamo
$$X_n = X_{n-1}Y_n = X_0\prod_{i=1}^{n} Y_i.$$
Il processo è di Markov rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, Y_1, \ldots, Y_n)$:
$$\mathbb{E}[f(X_n)|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[f(X_{n-1}Y_n)|\mathcal{F}_{n-1}] = \ldots$$

e ogni marginale X_n ha legge gaussiana standard: ad esempio la funzione caratteristica è, per induzione,

$$\varphi_{X_n}(t) = \varphi_{X_{n-1}Y_n}(t) = \varphi_{X_{n-1}}(t)P(Y_n = 1) + \varphi_{-X_{n-1}}(t)P(Y_n = 1) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

D'altra parte non è un processo gaussiano perché (X_0, X_1) non è congiuntamente gaussiana (è concentrata sulle due rette $\{x_0 = x_1\} \cup \{x_0 = -x_1\}$).

4. Abbiamo visto come conseguenza del teorema di Girsanov che la legge di $(B_t + h_t)_{t\geq 0}$ è equivalente a quella del moto browniano se $h_t = \int_0^t h'_s ds$ con $\int_0^\infty (h'_s)^2 ds < \infty$. Nel nostro caso, $h_t = t^{3/4}e^{-t}$ soddisfa questa condizione, essendo $h'_t = 3/4t^{-1/4}e^{-t} - t^{3/4}e^{-t}$ di quadrato integrabile (per $t \to 0$ la singolarità è $\approx t^{-1/2}$, quindi integrabile, per $t \to \infty$, l'esponenziale rende la funzione integrabile).

Problema 2

Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$\begin{cases} dX_t &= -X_t^3 dt + dB_t \\ X_0 &= 0. \end{cases}$$

dove $B = (B_t)_{t\geq 0}$ è un moto browniano reale. Si osservi che non è soddisfatta la condizione di Lipschitz per la buona positura.

1. Dato $R > 0$, dimostrare esistenza ed unicità per traiettorie per l'equazione

$$\begin{cases} dX_t &= -\operatorname{sign}(X_t)\left(|X_t| \wedge R\right)^3 dt + dB_t \\ X_0 &= 0. \end{cases}$$

Si denoti $X^R = (X_t^R)_{t\geq 0}$ la soluzione: posto

$$\tau_R = \inf\{t \geq 0 : |X_t^R| = R\},$$

mostrare che τ_R è un tempo d'arresto e

$$\mathbb{P}\text{-q.c.} \quad \forall t < \tau_R, \quad X_t^R = -\int_0^t \left(X_s^R\right)^3 ds + B_t.$$

2. Applicando la formula di Itô a $\left|X_t^R\right|^2$, mostrare che, per ogni $T > 0$, si ha

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|X_t^R\right|^2\right] \leq 3T.$$

Dedurre che, per ogni $T > 0, \varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che $\mathbb{P}(\tau_R \geq T) > 1 - \varepsilon$.

3. Si consideri ora l'equazione differenziale stocastica

$$dY_t = -Y_t^3 dt + Y_t^2 dB_t, \quad Y_0 = -y,$$

con $y > 0$. Posto $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t = 1/y\}$ (e se necessario considerando una successione approssimante $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : B_t = 1/y - 1/n\}$) si dimostri che per $t < \tau$ la seguente è una soluzione:

$$Y_t = -\frac{y}{1 - yB_t},$$

(ossia che il processo arrestato a τ soddisfa l'equazione per ogni $t < \tau$). Si deduca che l'equazione non può avere una soluzione definita su un intero intervallo fissato $[0, T]$. (*Facoltativo:* Cosa accade se invece si pone $y = 0$?)

Una soluzione:

1. La funzione $b_R(x) = -\mathrm{sgn}(x)(|x| \wedge R)^3$ è Lipschitz e uniformemente limitata, quindi vale il teorema di buona positura, e vale quasi certamente

$$\forall t \geq 0, \quad X_t^R(\omega) = \int_0^t b_R\left(X_s^R(\omega)\right) ds + B_t(\omega),$$

in cui assumendo inoltre $t < \tau_R$, quindi per continuità delle traiettorie $\left|X_t^R(\omega)\right| < R$, possiamo sostituire $b_R(X_t^R) = -|X_t^R|^3$.

2. La formula di Ito restituisce

$$d\left|X_t^R\right|^2 = -2\left|X_t^R\right|\left(\left|X_t^R\right| \wedge R\right)^3 dt + 2X_t^R dB_t + dt,$$

da cui deduciamo la disuguaglianza

$$\left|X_t^R\right|^2 \leq 2\int_0^t X_s^R dB_s + t.$$

Applichiamo ora le disuguaglianze di Hölder e Doob per stimare:

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|X_t^R\right|^2\right] &\leq E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|2\int_0^t X_s^R dW_s\right|\right] + T \\
&\leq E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|2\int_0^t X_s^R dW_s\right|^2\right]^{1/2} + T \\
&\leq 2E\left[\int_0^T \left|X_s^R\right|^2 ds\right]^{1/2} + T \\
&\leq 2\sqrt{T}E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|X_t^R\right|^2\right]^{1/2} + T.
\end{aligned}$$

Usando la diseguaglianza elementare $ab \leq a^2/2 + b^2/2$ con $a = 2\sqrt{T}$ segue la tesi. Per la disuguaglianza di Chebyshev,

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} \left|X_t^R\right| \geq R\right) \leq \frac{E\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|X_t^R\right|^2\right]}{R^2} \leq \frac{16T^2e^{4T}+T}{R^2}.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, prendiamo R tale che $16T^2e^{4T} + T < \varepsilon R^2$. Vale

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} \left|X_t^R\right| < R\right) \geq 1-\varepsilon, \quad \text{ovvero} \quad P\left(\tau_R \geq T\right) > 1-\varepsilon.$$

3. La funzione $f(z) = \frac{y}{1-yz}$ non soddisfa le ipotesi della formula di Ito, ma considerando una funzione g_n che coincide con f su $(-\infty, 1/y - 1/n]$ e globalmente C^2 possiamo applicare la formula di Ito a quest'ultima. Restringendosi a $t < \tau_n$ vale dunque

$$dg_n(B_t) = g_n'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}g_n''(B_t)dt = g_n(B_t)^2dB_t - g_n(B_t)^3dt,$$

per cui se $Y_t = g_n(B_t)$,

$$Y_{t\wedge\tau_n} = y - \int_0^{t\wedge\tau_n} Y_s^3 ds + \int_0^{t\wedge\tau_n} Y_s^2 dW_s,$$

da cui la tesi mandando $n \to \infty$. Per $t \uparrow \tau$ la soluzione Y_t così definita diverge, ma ogni altra soluzione deve coincidere con essa su ogni intervallo $[0, \tau_n]$, per cui non è possibile che esista una soluzione Y_t definita su un intero intervallo fissato $[0, T]$, poichè con probabilità positiva i tempi d'arresto Browniani τ_n cadono prima di T.