DENSITÀ DI VARIABILI ALEATORIE VIA FORMULE DI INTEGRAZIONE PER PARTI E SEMIGRUPPO DEL CALORE

DARIO TREVISAN - SIMONE ROTUNDO

In queste pagine proponiamo una dimostrazione leggermente diversa dei Teoremi 1.1.3 e 1.1.5 degli appunti di M. Pratelli [1].

Innanzitutto introduciamo questa notazione (essenzialmente un caso particolare della Definizione 1.1.1 in [1]).

Definizione 1. Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e una variabile aleatoria $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$, diciamo che F soddisfa una formula di integrazione per parti se, per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}$ esiste $H_i : \Omega \to \mathbb{R}^m$ integrabile tale che

$$\mathbb{E}\left[\partial_i \varphi(F)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(F) H_i\right] \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^m). \tag{1}$$

Osserviamo alcune semplici proprietà della variabile aleatoria $H = (H_i)_{i=1}^m$. Ponendo $\varphi(x)$ costante uguale ad 1, otteniamo che $\mathbb{E}\left[H_i\right] = 0$. Inoltre, introducendo la variabile aleatoria $\mathbb{E}\left[H_i|F\right]$, si ha, per la regolarità di φ, che dall'identità

$$\mathbb{E}\left[\varphi(F)H_i\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\varphi(F)H_i|F\right]\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(F)\mathbb{E}\left[H_i|F\right]\right]$$

segue che in (1) si può sostituire H_i con $\mathbb{E}\left[H_i|F\right]$.

Inoltre, introducendo l'operatore *divergenza* di un campo vettoriale $b = (b_i)_{i=1}^m \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$,

$$\operatorname{div} b(x) = \sum_{i=1}^m \partial_i b_i(x), \quad \text{per } x \in \mathbb{R}^m,$$

possiamo riassumere (1) in forma vettoriale nel seguente modo:

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{div} b(x)\right] = \mathbb{E}\left[\langle b(F), H\rangle\right] \quad \text{per ogni } b \in \mathcal{C}^1_b(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m), \tag{2}$$

dove $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^m u_i v_i$ indica il prodotto scalare tra vettori u, $v \in \mathbb{R}^m$. Infatti, supponendo che F soddisfi una formula di integrazione per parti, deve esistere H vettore aleatorio integrabile tale che

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{div} b(F)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m \partial_i b_i(F)\right] = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}\left[\partial_i b_i(F)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^m \mathbb{E}\left[b_i(F)H_i\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m b_i(F)H_i\right] = \mathbb{E}\left[\langle b(F), H\rangle\right]$$

Viceversa, basta considerare il campo vettoriale $b(x) = (0, \ldots, 0, \varphi(x), 0, \ldots 0)$ dove $\varphi(x)$ appare alla componente i, per cui deve valere

$$\mathbb{E}\left[\varphi(F)H_i\right] = \mathbb{E}\left[\langle b(F), H\rangle\right] = \mathbb{E}\left[\operatorname{div} b(F)\right] = \mathbb{E}\left[\partial_i \varphi(F)\right]$$

Ripetendo il ragionamento per ogni $i = 1, \dots, m$ si ottiene che F soddisfa una formula di integrazione per parti.

Teorema 2. *Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una variabile aleatoria che soddisfa una formula di integrazione per parti (1) (o equivalentemente (2)). Allora la legge di F ammette densità f rispetto alla misura di Lebesgue $\mathscr{L}^m$. Inoltre vale $f \in L^p(\mathbb{R}^m, \mathscr{L}^m)$, per ogni $p \in [1, \frac{m}{m-1})$.*

Problema 3. In realtà i Teoremi 1.1.3 e 1.1.5 degli appunti [1] dimostrano che $f \in L^{\frac{m}{m-1}}(\mathbb{R}^m, \mathscr{L}^m)$. Sarebbe interessante capire se la dimostrazione proposta qui si possa adattare per coprire tale caso.

Prima di passare alla dimostrazione del risultato, ricordiamo alcune proprietà della trasformazione nota come *semigruppo del calore*

$$C_b(\mathbb{R}^m) \ni u \mapsto Pu = (P_t u)_{t \in [0,T]} \in C_b([0,T] \times \mathbb{R}^m),$$

$$P_t u(x) := \int_{\mathbb{R}^m} u(x + \sqrt{t} y) e^{-\frac{1}{2}||y||^2} \frac{\mathrm{d}y}{(2\pi)^{m/2}}.$$

Dimostriamo alcune semplici proprietà della mappa P (in realtà vale molto di più di quanto vediamo sotto, ma questo basta per i nostri scopi).

Lemma 4. *Valgono le seguenti proprietà:*

i) La mappa P è ben definita, lineare e continua e vale la proprietà di semigruppo

$$P_t(P_s u) = P_{s+t} u,$$

ii) Se $u \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$, allora $P_t u \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$ e vale l'identità

$$P_t u(x) = u(x) + \int_0^t \frac{1}{2} \Delta P_s u(x) \mathrm{d}s. \tag{3}$$

iii) per ogni $t \in (0, T]$, si ha $P_t u \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$ ed ed inoltre vale che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} ||\nabla P_t u(x)|| \le \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{t}} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |u(x)|.$$

iv) per ogni $q \in [1, \infty)$, $t \in (0, T]$, vale

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} |P_t u(x)| \le c_q t^{-\frac{m}{2q}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^q \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}},$$

dove $c_q \ge 0$ dipende unicamente da q e da m (né da t né da u).

v) per ogni

Una dimostrazione del lemma è fornita nell'appendice A.

Dimostrazione del Teorema 2. Dato $p \in (1, \frac{m}{m-1})$, poniamo $q = p/(p-1) \in (m, +\infty)$. Data $u \in C_c^2(\mathbb{R}^m)$, passando al valore atteso troviamo che

$$\mathbb{E}\left[P_T u(F)\right] = \mathbb{E}\left[u(F)\right] + \int_0^T \frac{1}{2} \mathbb{E}\left[\Delta P_s u(F)\right] \mathrm{d}s$$

$$\mathbb{E}\left[\Delta P_s u(F)\right] = \mathbb{E}\left[\operatorname{div}(\nabla P_s u(F))\right] = \mathbb{E}\left[\langle H, \nabla P_s u(F) \rangle\right],$$

da cui otteniamo l'identità

$$\mathbb{E}\left[u(F)\right] = \mathbb{E}\left[P_T u(F)\right] - \int_0^T \frac{1}{2} \mathbb{E}\left[\Delta P_s u(F)\right] ds = \mathbb{E}\left[P_T u(F)\right] - \int_0^T \mathbb{E}\left[\langle H, \nabla P_s u(F) \rangle\right] \mathrm{d}s.$$

Da questa il passaggio successivo è di ottenere la diseguaglianza

$$|\mathbb{E}\left[u(F)\right] \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^q \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4}$$

dove $C \geq 0$ dipende unicamente da p, T e $\mathbb{E}\left[||H||\right]$ (in particolare, non dipende da u). Da essa segue che funzionale lineare
$U : u \in C_c^2(\mathbb{R}^m) \mapsto \mathbb{E}\left[u(F)\right]$ è continuo rispetto alla topologia di $L^q(\mathbb{R}^m, \mathscr{L}^m)$, e pertanto si può estendere ad un funzionale lineare limitato $\tilde{U}$ su $L^q(\mathbb{R}^m)$ sfruttando ad esempio la versione funzionale del Teorema di Hahn-Banach. Per il Teorema di Rappresentazione di Riesz si ha che $\tilde{U}$, e quindi anche U, è rappresentato da un elemento $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^m, \mathscr{L}^m)$. Tale $f \in L^p(\mathbb{R}^m, \mathscr{L}^m)$ è anche unico, per l'unicità dell'estensione dovuta alla densità di $C_c^2(\mathbb{R}^m)$ in $L^q(\mathbb{R}^m, \mathscr{L}^m)$. Infatti se vi fossero due estensioni diverse $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$, data $u \in L^q(\mathbb{R}^m)$ e data $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c^2(\mathbb{R}^m)$ successione che converge in norma $||.||_{L^q}$ a u, si avrebbe che

$$\left|\tilde{U}(u) - \tilde{U}(u)\right| = \left|\tilde{U}(u) - U(u_n) + U(u_n) - \tilde{V}(u)\right| \leq \left|\tilde{U}(u) - \tilde{U}(u_n)\right| + \left|\tilde{V}(u_n) - \tilde{V}(u)\right| \leq$$

$$\leq L_{\tilde{U}}||u - u_n||_{L^q} + L_{\tilde{V}}||u - u_n||_{L^q} \to 0$$

dove $L_{\tilde{U}}$ e $L_{\tilde{V}}$ le costanti di Lipschitz opportune dei funzionali lineari $\tilde{U}$ e $\tilde{V}$. Pertanto le due estensioni devono coincidere. Si trova quindi

$$\mathbb{E}\left[u(F)\right] = \int_{\mathbb{R}^m} u(x)f(x)\mathrm{d}x, \quad \text{per ogni } u \in C_c^2(\mathbb{R}^m), \tag{5}$$

e quindi f è la densità della legge di F, in quanto $\mathbb{E}\left[u(F)\right] = \int_{\mathbb{R}^m} u(x)dP_F(x)$ e i due integrali coincidono su tutte le $u \in C_c^2(\mathbb{R}^m)$, dunque le misure devono essere uguali (basta approssimare puntualmente ogni indicatrice del prodotto cartesiano di semirette negative con una opportuna successione di funzioni regolari a supporto compatto e poi utilizzare ad esempio il teorema di convergenza dominata per passare al limite sotto il segno di integrale). Osserviamo che il fatto che f sia una densità ci dice anche che $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Per mostrare (4), dalla proprietà *iv)* del lemma precedente, abbiamo

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}\left[P_T u(F)\right]| &\leq \mathbb{E}\left[\sup_{x\in\mathbb{R}^m} |P_T u(x)|\right] = \sup_{\mathbb{R}^m} |P_T u(x)| \\ &\leq c_p T^{-\frac{m}{2q}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^q \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned} \tag{6}$$

mentre applicando la proprietà *iii)* e poi ancora la *iv)*, troviamo che

$$|\mathbb{E}\left[\langle H, \nabla P_s u(F)\rangle\right]| = |\mathbb{E}\left[\left\langle H, \nabla P_{\frac{s}{2}} P_{\frac{s}{2}} u(F)\right\rangle\right]| \leq \mathbb{E}\left[\left|\left\langle H, \nabla P_{\frac{s}{2}}(P_{\frac{s}{2}} u)(F)\right\rangle\right|\right] \leq$$

per la proprietà di semigruppo $P_s P_t u = P_{s+t} u$,

$$\leq \mathbb{E}\left[||H|| ||\nabla P_{\frac{s}{2}} P_{\frac{s}{2}} u(F)||\right] \leq \mathbb{E}\left[||H||\right] \sup_{x\in\mathbb{R}^m} ||\nabla P_{\frac{s}{2}} P_{\frac{s}{2}} u(x)|| \leq$$

per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\leq \mathbb{E}\left[||H||\right] \sqrt{m}(s/2)^{-1/2} \sup_{x\in\mathbb{R}^m} |P_{\frac{s}{2}} u(x)| \leq$$

per la proprietà *iii)* con $t = s/2$,

$$\leq \mathbb{E}\left[||H||\right] \sqrt{m} c_p (s/2)^{-\frac{1}{2}} (s/2)^{-\frac{m}{2q}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

per la proprietà *iv)* con $t = s/2$.

L'ipotesi $q > m$ implica che $\frac{m}{q} < 1$ e quindi $-\frac{1}{2} - \frac{m}{2q} > -1$ e quindi

$$\int_0^T s^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{2q}} \mathrm{d}s = \frac{T^{\frac{1}{2}-\frac{m}{2q}}}{\frac{1}{2}-\frac{m}{2q}} < \infty.$$

Mettendo insieme quanto trovato finora, concludiamo che

$$|\mathbb{E}\left[u(F)\right]| = |\mathbb{E}\left[P_T u(F)\right] - \int_0^T \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\langle H, \nabla P_s u(F)\rangle\right] ds| \leq$$

$$\leq c_p T^{-\frac{m}{2q}} (\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}} + \int_0^T \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[||H||\right] c_p \sqrt{m} (\frac{s}{2})^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{2q}} (\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}} ds =$$

$$= c_p (\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}} (T^{-\frac{m}{2q}} + \mathbb{E}\left[||H||\right] \sqrt{m} \frac{(\frac{T}{2})^{\frac{1}{2}-\frac{m}{2q}}}{\frac{1}{2}-\frac{m}{2q}}) = C (\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}$$

Dunque la (4) vale con $C = c_p(T^{-\frac{m}{2q}} + \mathbb{E}\left[||H||\right] \sqrt{m} \frac{(\frac{T}{2})^{\frac{1}{2}-\frac{m}{2q}}}{\frac{1}{2}-\frac{m}{2q}})$ e quindi la dimostrazione è conclusa. □

Osservazione 5. Più precisamente, abbiamo ottenuto che, per una opportuna constante $c_p \geq 0$, vale

$$|\mathbb{E}\left[u(F)\right]| \leq c_p \left(T^{-\frac{m}{2q}} + \gamma \mathbb{E}\left[||H||\right] T^{\frac{1}{2}-\frac{m}{2q}}\right) \left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

con $\gamma = \sqrt{m}\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}-\frac{m}{2q}}}{\frac{1}{2}-\frac{m}{2q}}$. Ponendo T in modo che $T^{-\frac{m}{2q}} = \gamma \mathbb{E}\left[||H||\right] T^{\frac{1}{2}-\frac{m}{2q}}$, ossia

$$T = (\gamma \mathbb{E}\left[||H||\right])^{-2},$$

si trova che

$$|\mathbb{E}\left[u(F)\right]| \leq 2c_p T^{-\frac{m}{2q}} (\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}} = 2c_p (\gamma \mathbb{E}\left[||H||\right])^{\frac{m}{q}} (\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}},$$

da cui segue una disuguaglianza per la norma integrale della densità di f, essendo questa la norma del funzionale lineare continuo $u \mapsto \mathbb{E}[u(F)]$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{||u||_{L^q}\leq 1} |\mathbb{E}[u(F)]| \leq \sup_{||u||_{L^q}\leq 1} 2c_p(\gamma\mathbb{E}[H])^{\frac{m}{q}}||u||_{L^q} \leq 2c_p\gamma^{\frac{m}{q}}(\mathbb{E}[||H||])^{\frac{m}{q}}.$$

Osservazione 6. Supponiamo che sia $H \in L^r(\Omega)$, per qualche $r > 1$. È possibile migliorare il risultato ottenendo maggiore regolarità/integrabilità per la densità f? Un caso speciale è quello di $m = 1$. Infatti in questo caso speciale sappiamo dal Teorema 1.1.3 di [1] che la densità ha una forma speciale data da

$$f(x) = \mathbb{E}\left[I_{\{F\geq x\}}H\right]$$

Dunque la densità appartiene a L^∞ in quanto $|\mathbb{E}\left[I_{\{F\geq x\}}H\right]| \leq \mathbb{E}\left[|I_{\{F\geq x\}}H|\right] \leq$ $\leq \mathbb{E}[|H|] < \infty$ poiché H è integrabile.

A questo punto, prendendo $r' = r/(r-1)$ il coniugato di r e usando la disuguaglianza di Hölder, possiamo dire che

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |\mathbb{E}\left[I_{\{F\geq x\}}H\right] - \mathbb{E}\left[I_{\{F\geq y\}}H\right]| = |\mathbb{E}\left[(I_{\{F\geq x\}} - I_{\{F\geq y\}})H\right]| \\
&\leq \mathbb{E}\left[|I_{\{x\leq F<y\}}H|\right] \leq \mathbb{E}\left[|I_{\{x\leq F<y\}}|^{r'}\right]^{\frac{1}{r'}} \mathbb{E}[|H|^r]^{\frac{1}{r}} \\
&= (\int_x^y f(t)dt)^{\frac{1}{r'}}\mathbb{E}[|H|^r]^{\frac{1}{r}} \\
&\leq M|x-y|^{\frac{1}{r'}}
\end{aligned}$$

dove $M = ||f||_{L^\infty}^{\frac{1}{r'}}\mathbb{E}[|H|^r]^{\frac{1}{r}}$.

Abbiamo quindi ottenuto che la densità è Holderiana con esponente $\frac{1}{r'} = 1 - \frac{1}{r}$.

Nel caso $m \geq 2$, raffinando la dimostrazione del Teorema 2, si può mostrare il seguente risultato.

Esercizio 7. Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una variabile aleatoria che soddisfa una formula di integrazione per parti (1) (o equivalentemente (2)) con $H \in L^r(\Omega)$, per $r \in [1, \infty]$. Allora la legge di F ammette densità f rispetto alla misura di Lebesgue $\mathscr{L}^m$, con $f \in L^p(\mathbb{R}^m, \mathscr{L}^m)$, per ogni $p \in [1, \frac{mr}{1+r(m-2)})$.

Appendice A. Dimostrazione del Lemma 4

i). Perché P sia ben definita, dev'essere anzitutto che la funzione $y \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}u(x+\sqrt{t}y)e^{-\frac{1}{2}||y||^2}$ sia integrabile su $\mathbb{R}^m$ per ogni $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in C_b(\mathbb{R}^m)$. Questo è vero poiché u è limitata, dunque esiste $M > 0$ tale che $|u(x+\sqrt{t}y)e^{-\frac{1}{2}||y||^2}| \leq Me^{-\frac{1}{2}||y||^2}$ e la funzione $y \mapsto e^{-\frac{1}{2}||y||^2}$ è integrabile. Dev'essere poi che $(t,x) \mapsto P_t u(x)$ sia effettivamente continua e limitata per ogni $u \in C_b(\mathbb{R}^m)$. Per vederlo, consideriamo $(B_t)_{t\in[0,T]}$ moto Browniano a valori in $\mathbb{R}^m$. Possiamo scrivere che $P_t u(x) = \mathbb{E}[u(x+B_t)]$. Infatti, ricordiamo che $B_t \sim N(0,tI)$; dunque se $Z \sim N(0,I)$ si ha:

$$\mathbb{E}\left[u(x+B_t)\right] = \int_\Omega u(x+B_t)dP = \int_\Omega u(x+\sqrt{t}Z)dP = \int_{\mathbb{R}^m} u(x+\sqrt{t}y)\frac{e^{-\frac{1}{2}||y||^2}}{(2\pi)^{m/2}}dy = P_t u(x)$$

Sia ora $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $[0,T]\times\mathbb{R}^m$ che converga a $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^m$. Poiché u è continua si ha che a sua volta $u(x_n+B_{t_n})$ converge a $u(x+B_t)$. Poiché u è anche limitata possiamo applicare il teorema di convergenza dominata e affermare che

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}\left[u(x_n+B_{t_n})\right] = \mathbb{E}\left[u(x+B_t)\right]$$

da cui segue la continuità della mappa $(t,x)\mapsto\mathbb{E}\left[u(x+B_t)\right] = P_t u(x)$.

Poiché u è limitata, esiste $C\geq 0$ tale che $|u(x)|\leq C$ per ogni $x\in\mathbb{R}^m$. Dunque troviamo che

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^m}|P_t u(x)| \leq \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^m}|\mathbb{E}\left[u(x+B_t)\right]| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^m}|\mathbb{E}\left[u(x)\right]| = \sup_{x\in\mathbb{R}^m}|u(x)| \leq C < +\infty$$

Abbiamo pertanto ottenuto che la mappa $(t,x)\mapsto P_t u(x)$ è anche limitata. Concludiamo dunque che P è ben definita.

La linearità di $u\mapsto Pu$ è immediata. Siano infatti $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $u,v\in C_b(\mathbb{R}^m)$. Si vede facilmente che

$$P_t(\alpha u(x)+\beta v(x)) = \mathbb{E}\left[(\alpha u+\beta v)(x+B_t)\right] = \mathbb{E}\left[\alpha u(x+B_t)+\beta v(x+B_t)\right] =$$
$$= \alpha\mathbb{E}\left[u(x+B_t)\right] + \beta\mathbb{E}\left[v(x+B_t)\right] = \alpha P_t u(x) + \beta P_t v(x)$$

Dai conti fatti in precedenza per dimostrare che $P_t u$ è limitata, segue che

$$\sup_{u\neq 0}\left(\frac{\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^m}|P_t u(x)|}{\sup_{x\in\mathbb{R}^m}|u(x)|}\right) \leq \sup_{u\neq 0}\left(\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^m}|u(x)|}{\sup_{x\in\mathbb{R}^m}|u(x)|}\right) = 1 < +\infty$$

da cui la limitatezza dell'operatore $u\mapsto Pu$ (come definito tra spazi di funzioni continue). Dato che P è anche lineare, si conclude che P è anche continuo.

La proprietà di semigruppo segue dall'identità $B_{t+s} = (B_{t+s}-B_s)+B_s$, valida per ogni $s,t\in[0,T]$. Infatti, ricordando che $B_{t+s}-B_s\sim N(0,tI)$, per ogni $s,t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^m$, $u\in C_b(\mathbb{R}^m)$ si ha

$$P_{s+t}u(x) = \mathbb{E}\left[u(x+B_{s+t})\right] = \mathbb{E}\left[u(x+(B_{t+s}-B_s)+B_s)\right] = \mathbb{E}\left[u(x+B_t+B_s)\right] =$$
$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[u((x+B_t)+B_s)\right]\right] = \mathbb{E}\left[P_s u(x+B_t)\right] = P_t(P_s u)(x)$$

ii). Sia $u\in C_b^2(\mathbb{R}^m)$. In particolare u risulta essere lipschitziana, ovvero esiste una costante $L>0$ tale che per ogni $x,y\in\mathbb{R}^m$ vale

$$|u(x)-u(y)|\leq L||x-y||$$

In particolare dunque, per ogni $x\in\mathbb{R}^m$, $h\in\mathbb{R}$, $t\in[0,T]$, $i\in\{1,\ldots,m\}$ vale

$$|u(x+B_t+he_i)-u(x+B_t)| \leq L||x+B_t+he_i-(x+B_t)|| = L||he_i|| = L|h|$$

da cui si ricava

$$\left| \frac{u(x + B_t + he_i) - u(x + B_t)}{h} \right| \leq L$$

Preso allora $i \in \{1, \dots, m\}$, per il teorema di convergenza dominata si ha che

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_t u(x + he_i) - P_t u(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{E}\left[u(x + B_t + he_i)\right] - \mathbb{E}\left[u(x + B_t)\right]}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \mathbb{E}\left[\frac{u(x + B_t + he_i) - u(x + B_t)}{h}\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{h \to 0} \frac{u(x + B_t + he_i) - u(x + B_t)}{h}\right] =$$
$$= \mathbb{E}\left[\partial_i u(x + B_t)\right] = P_t(\partial_i u)(x)$$

Si trova dunque che $P_t u$ è derivabile e risulta $\partial_i (P_t u)(x) = P_t(\partial_i u)(x)$ per $i = 1, \dots, m$. Le derivate parziali sono inoltre continue e limitate in quanto la mappa $x \mapsto P_t v(x)$ è una funzione continua e limitata per ogni $v \in C_b$. Pertanto si può concludere che $P_t u \in C_b^1(\mathbb{R}^m)$. Si può ripetere in maniera analoga il ragionamento per la derivata seconda, ottenendo che $P_t u \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$. Inoltre vale

$$\partial_i^2 (P_t u)(x) = \partial_i P_t(\partial_i u)(x) = P_t(\partial_i^2 u)(x)$$

Pertanto si trova che

$$\Delta P_t u(x) = \sum_{i=1}^m \partial_i^2 P_t u(x) = \sum_{i=1}^m P_t(\partial_i^2 u)(x) = P_t(\sum_{i=1}^m \partial_i^2 u)(x) = P_t(\Delta u)(x)$$

Per verificare l'identità (3), possiamo pensare di usare la formula di Ito e poi prendere il valore atteso. Infatti, sia $(X_t)_t = (B_t)_t$. Allora $(X_t)_t$ risolve l'equazione differenziale stocastica $dX_t = dB_t$. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definita da $f(y) = u(x + y)$ per $x \in \mathbb{R}^m$. Dal momento che abbiamo preso $u \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$ risulterà anche $f \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$. Applichiamo allora la formula di Ito:

$$df(X_t) = \sum_{i=1}^m \partial_i f(X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_t) d[X^i, X^j]_t =$$
$$= \sum_{i=1}^m \partial_i u(x+B_t) dB_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x+B_t) d[B^i, B^j]_t = \sum_{i=1}^m \partial_i u(x+B_t) dB_t^i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \partial_i^2 u(x+B_t) dt$$

In forma integrale diventa

$$f(X_t) = f(B_t) = u(x+B_t) = u(x+B_0) + \sum_{i=1}^m \int_0^t \partial_i u(x+B_s) dB_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^m \partial_i^2 u(x+B_s) ds$$

Prendendo il valore atteso si ha

$$P_t u(x) = \mathbb{E}\left[u(x + B_t)\right] = \mathbb{E}\left[u(x) + \sum_{i=1}^m \int_0^t \partial_i u(x + B_s) dB_s^i + \int_0^t \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \partial_i^2 u(x + B_s) ds\right] =$$

$$= u(x) + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}\left[\int_0^t \partial_i u(x+B_s)dB_s^i\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \partial_i^2 u(x+B_s)ds\right] =$$

$$= u(x) + \int_0^t \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m}(\partial_i^2 u)(x+B_s)\right]ds = u(x) + \int_0^t \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\Delta u(x+B_s)\right]ds =$$

$$= u(x) + \int_0^t \frac{1}{2}P_s(\Delta u)(x)ds$$

iii). Siano $t \in (0,T]$, $u \in C_b(\mathbb{R}^m)$ e $x \in \mathbb{R}^m$. Operiamo la sostituzione $z = x + \sqrt{t}y$ nella definizione di $P_t u$ (il determinante dello jacobiano della trasformazione risulta uguale a $(\frac{1}{\sqrt{t}})^m$):

$$P_t u(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{u(x+\sqrt{t}y)e^{-\frac{1}{2}||y||^2}}{(2\pi)^{(m/2)}}dy = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{u(z)e^{-\frac{1}{2}||\frac{z-x}{\sqrt{t}}||^2}}{(2\pi)^{m/2}(\sqrt{t})^m}dz$$

La funzione definita da $g(x) = e^{-\frac{1}{2}||\frac{z-x}{\sqrt{t}}||^2} = e^{-\frac{1}{2t}||z-x||^2}$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^m)$, integrabile su $\mathbb{R}^m$ e vale $\partial_i g(x) = \frac{(z_i-x_i)e^{-\frac{1}{2t}||z-x||^2}}{t}$ per $i = 1,\dots,m$, a sua volta ancora integrabile. Per il teorema del valor medio si ha che per ogni $i \in \{1,\dots,m\}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $h \in \mathbb{R}$ esiste $\xi \in \{\lambda x + (1-\lambda)(x+he_i) | \lambda \in [0,1]\}$ tale che $g(x+he_i) - g(x) = \langle \nabla g(\xi), he_i\rangle = h\partial_i g(\xi)$.

Ma allora, considerando la limitatezza di u, e quindi il fatto che esiste $M > 0$ tale che per ogni $z \in \mathbb{R}^m$ vale $|u(z)| \le M$, e prendendo h opportunamente piccolo, ad esempio $h \le 1$, si ha che

$$\left|u(z)(\frac{e^{-\frac{1}{2t}||z-x-he_i||^2} - e^{-\frac{1}{2t}||z-x||^2}}{h})\right| = \left|u(z)\frac{g(x+he_i)-g(x)}{h}\right| \le$$

$$\le M|\partial_i g(\xi)| \le M \max_{||x-w||\le 1} |\partial_i g(w)| = \frac{M}{t}|z_i - \bar{w}_i|e^{-\frac{1}{2t}||z-\bar{w}||^2}$$

dove $\bar{w}$ è il vettore della palla chiusa di centro x e raggio unitario dove si realizza il massimo della funzione $\partial_i g$.

Possiamo dunque applicare il teorema di convergenza dominata, ottenendo

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_t u(x+he_i) - P_t u(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{u(z)}{(2\pi)^{m/2}(\sqrt{t})^m} \frac{e^{-\frac{1}{2t}||z-x-he_i||^2} - e^{-\frac{1}{2t}||z-x||^2}}{h}dz =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{u(z)e^{-\frac{1}{2t}||z-x||^2}(z_i-x_i)}{(2\pi)^{m/2}(\sqrt{t})^m t}dz = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{u(x+\sqrt{t}y)e^{-\frac{1}{2}||y||^2}\sqrt{t}y_i}{(2\pi)^{m/2}t}dy = \mathbb{E}\left[(u(x+B_t)\frac{B_t^i}{t}\right]$$

Per cui $P_t u \in C_b^1(\mathbb{R}^m)$.

Si ragiona in modo simile per la derivata seconda, ottenendo $P_t u \in C_b^2(\mathbb{R}^m)$. Inoltre vale

$$\nabla P_t u(x) = \mathbb{E}\left[u(x+B_t)\frac{B_t}{t}\right]$$

Per ottenere la stima sopra, scriviamo esplicitamente la norma di $\nabla P_t u(x)$ e utilizziamo la disuguaglianza di Jensen nel seguente modo:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^m} ||\nabla P_t u(x)|| = \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \frac{1}{t} ||\mathbb{E}\left[u(x+B_t)B_t\right]|| = \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \frac{1}{t} (\sum_{i=1}^m \mathbb{E}\left[u(x+B_t)B_t^i\right]^2)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \frac{1}{t} (\sum_{i=1}^m \mathbb{E}\left[u^2(x+B_t)(B_t^i)^2\right])^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \frac{1}{t} (\sum_{i=1}^m u^2(x) t)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \frac{\sqrt{m}\,|u(x)|\,\sqrt{t}}{t} =$$

$$= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{t}} \sup_{x\in\mathbb{R}^m} |u(x)|$$

iv) Siano $p \in [1,+\infty)$, $t \in (0,T]$, $u \in C_b(\mathbb{R}^m)$, $x \in \mathbb{R}^m$. Denotiamo con q l'esponente coniugato di p, e con φ la densità di una gaussiana $N(0,I)$ definita da $\varphi(y) = \frac{e^{-\frac{1}{2}||y||^2}}{(2\pi)^{m/2}}$.

Applicando la disuguaglianza di Hölder, troviamo che

$$|P_t u(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^m} \frac{u(x+\sqrt{t}y)e^{-\frac{1}{2}||y||^2}}{(2\pi)^{m/2}} dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^m} \left| \frac{u(x+\sqrt{t}y)e^{-\frac{1}{2}||y||^2}}{(2\pi)^{m/2}} \right| dy \leq$$

$$\leq (\int_{\mathbb{R}^m} |u(x+\sqrt{t}y)|^p dy)^{\frac{1}{p}})||\varphi||_{L^q} = (\int_{\mathbb{R}^m} |u(z)|^p (\frac{1}{\sqrt{t}})^m dz)^{\frac{1}{p}} c_p = t^{-\frac{m}{2p}} c_p (\int_{\mathbb{R}^m} |u(z)|^p dz)^{\frac{1}{p}}$$

avendo fatto il cambio di variabile $z = x + \sqrt{t}y$ nel primo integrale, e ponendo

$$c_p := ||\varphi||_{L^q}.$$

Dunque la disuguaglianza voluta segue prendendo il sup per $x \in \mathbb{R}^m$.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Pratelli: "Un corso introduttivo sul Calcolo di Malliavin." Disponibile alla pagina http://people.dm.unipi.it/pratelli/Didattica/Appunti-Malliavin.pdf

Email address, D. Trevisan: dario.trevisan@unipi.it
Email address, S. Rotundo: simrotu@hotmail.it