Lezione

1) densità della legge di v.a. X regolare

2) concentrazione della misura (Sobolev - isoperimetria)

Esempi · Soluzioni di EDS $dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t$

$\varphi(X_t)$, $\Phi\left((X_t)_{t\in[0,T]}\right)$ -

---

1) Ricordiamo cambio di variabile $X:\Omega \to \mathbb{R}$ con densità f_X

e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ diffeo $\Rightarrow$ $g(X)$ ha densità

$$f_{g\circ X}(y) = f_X(g^{-1}(y))\,\frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

Una possibile strada è generalizzare $X \leftrightarrow (W_t)_{t\in[0,T]}$

$g: \mathcal{C}_0([0,T]) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ($d=1$ per semplicità)

$|g'|$?

Malliavin voleva in particolare dare una dimostrazione probabilistica

del teorema di Hörmander : se $\mathcal{L}f(x) = \sum_{i=1}^{k} b_i \nabla(b_i \nabla f)$

$b_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ campi vett. $\mathcal{C}^\infty$ tali che

in ogni punto "generano" tutto $\mathbb{R}^d$ $\overset{\text{Teo}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{L}$ è ipoellittico.

ossia se $\boxed{\mathcal{L} u = f}$ $f \in \mathcal{C}^\infty_{loc}$, allora $u \in \mathcal{C}^\infty_{loc}$.

probabilisticamente il Teo corrisponde a mostrare che

la legge della SDE $\begin{cases} dX_t = \sum_{i=1}^{k} b_i(X_t)\, dW^i \\ X_0 = x \end{cases}$

ha densità $p_t(x, \cdot)$ $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ $\forall t > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

L'osservazione chiave di Malliavin è la seguente (in dim 1)

Se μ prob. su $\mathbb{R}$ soddisfa una formula di integrazione per parti

$$\forall f \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} f'(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, w(x)\, d\mu(x) \qquad \text{(IBP)}$$

con $w \in L^1(\mu)$, allora $\mu \ll Leb$ con densità

$$\boxed{p(x) = \frac{d\mu}{dLeb}(x) = \int_{\mathbb{R}} I_{\{y > x\}}\, w(y)\, d\mu(y)}$$

Euristica: • $\int \partial_x f\, d\mu = \int \partial_x f\, p\, dx = -\int f \frac{\partial_x p}{p} \overbrace{p\, dx}^{=\mu}$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = -\frac{p'}{p} = -(\log p)'}$$

- Formula per $p(x)$? "$\partial_x f(x) = \delta_{x_0}(x)$"

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} d\delta_{x_0}(x) = I_{\{x > x_0\}}$$

$$p(x_0) = \int_{\mathbb{R}} \delta_{x_0}(x)\, d\mu(x) \overset{\text{IBP}}{=} \int_{\mathbb{R}} I_{\{x > x_0\}}\, w(x)\, d\mu(x) \quad \square$$

- Formula esplicita $\Rightarrow$ altre informazioni, es: i) $\|p(x)\|_\infty \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |w|\, d\mu$

ii) $$p(x) - p(x') = \int_{x}^{+\infty} w(y)\, d\mu(y) - \int_{x'}^{+\infty} w(y)\, d\mu(y) =$$

$$= \int_{x}^{x'} w(y)\, d\mu(y) = \int_{x}^{x'} w(y)\, p(y)\, dy \leq \|w\|_\infty \|p\|_\infty\, |x - x'|$$

iii) Se vale $$\int f''\, d\mu \overset{\text{IBP}_1}{=} \int f'\, w_1\, d\mu \overset{\text{IBP}_2}{=} \int f\, w_2\, d\mu \quad \forall f \in C_c^2$$

allora $$p'(x_0) = \partial_{x_0} \int I_{\{x - x_0 > 0\}}\, w_1(x)\, d\mu(x)$$

$$\overset{\text{IBP}_2}{=} \int -\partial_x I_{\{x - x_0 > 0\}}\, w_1(x)\, d\mu(x) =$$

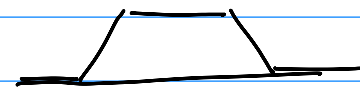
$$= -\int I_{\{x > x_0\}}\, w_2(x)\, d\mu(x).$$

OSS $d > 1$. $\bar{x} \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \delta_{\bar{x}} = \partial_{x_1} \partial_{x_2} \cdots \partial_{x_d} \prod_{i=1}^{d} I_{\{x_i > \bar{x}_i\}}$

oppure $\delta_{\bar{x}} = \Delta G(x, \bar{x})$

Lemma Se $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\omega \in L^1(\mu)$ sono t.c. $\forall f \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\omega(x)\,d\mu(x)$$



allora μ ha densità $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ data da

$$\rho(x_0) = \int_{\mathbb{R}} I_{\{x>x_0\}}\,\omega(x)\,d\mu(x) .$$

Dim Osserviamo che ρ è continua a sx per conv. dominata e pure limitata.

Sia $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$

$$\boxed{\int f(x_0)\,\rho(x_0)\,dx_0} = \int f(x_0)\left(\int I_{\{x>x_0\}}\,\omega(x)\,d\mu(x)\right)dx_0$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} I_{\{x>x_0\}}\,f(x_0)\,dx_0\right)\omega(x)\,d\mu(x)$$

$$x \mapsto F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x_0)\,dx_0 \quad \text{è } \mathcal{C}^1_b$$

$$= \int_{\mathbb{R}} F(x)\,\omega(x)\,d\mu(x) \overset{IBP}{=} \int_{\mathbb{R}} F'(x)\,d\mu(x)$$

$$= \boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu(x)}$$

$\Longrightarrow$ criterio coincidenza di misure $\Longrightarrow$ $\boxed{\mu = \rho\, Leb^1}$.

Notazione probabilistica: Se $\mu = P_X$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\int f \, d\mu = \mathbb{E}[f(X)]$$

(IBP) $$\mathbb{E}[f'(X)] = \mathbb{E}[f(X)\,\omega(X)]$$

densità $$p_X(x) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X > x\}}\,\omega(X)]$$

Esercizio Se vale $\mathbb{E}[f'(X)] = \mathbb{E}[f(X) \cdot H]$ con $H \in L^1(\mathbb{P})$, allora vale IBP con $\omega(X) = \mathbb{E}[H \mid X]$.

Come ottenere IBP? Idea: se $X = \Phi\left((W_t)_{t \in [0,T]}\right)$

allora IBP segue da quella per DX ...

$\mathbb{D}^{1,2} = \{ X \in L^2(\mathbb{P}) : DX \in L^2(\mathbb{P}) \}$ $\quad H =$ Cameron-Martin

Lemma Sia $X \in \mathbb{D}^{1,2}$, $G \in L^2(H)$ tale che $\dfrac{G}{\langle DX, G \rangle_H} \in \mathrm{dom}\,\delta$

e $\boxed{\langle DX, G \rangle \neq 0 \ \mathbb{P}\text{-q.c.}}$,

allora $$\mathbb{E}[f'(X)] = \mathbb{E}\left[f(X)\, \delta\left(\frac{G}{\langle DX, G \rangle}\right)\right]$$

$\forall f \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})$.

Infatti $$\mathbb{E}\left[f'(X) \frac{\langle DX, G \rangle}{\langle DX, G \rangle}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\langle D(f \circ X), G \rangle}{\langle DX, G \rangle}\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[f(X)\, \delta\left(\frac{G}{\langle DX, G \rangle}\right)\right] \quad \square$$

oss Se $G = DX \rightsquigarrow |DX| \neq 0 \ \mathbb{P}$ q.c.

(**Lemma** Se $X \in \mathbb{D}^{1,2}$ se $|DX| \neq 0$ P q.c. allora X ammette densità.)

In $d > 1$ è cruciale la matrice di Malliavin:

Data $X = (X_1 \dots X_d) \in \mathbb{D}^{1,2}$ si pone $A_{ij} = \langle DX_i , DX_j \rangle_H$

OSS $A_{ij} = A_{ji}$ $\quad v^T A v \geq 0$ $\forall v \in \mathbb{R}^d$ P-q.c.

$$v^T A v = \sum_{i,j} v_i A_{ij} v_j = \sum_{i,j} \langle D v_i X_i , D v_j X_j \rangle = |D \sum_{i=1}^{d} v_i X_i|^2 .$$

Se $f \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^d)$, allora $D(f \circ X) = \sum_{i=1}^{d} (\partial_{x_i} f)(X) \, DX_i$

$$\langle D(f \circ X), DX_j \rangle = \sum_i (\partial_{x_i} f)(X) \langle DX_i , DX_j \rangle$$
$$= \sum_i (\partial_{x_i} f)(X) A_{ij}$$

Se A è invertibile $\Rightarrow$ $(\partial_{x_i} f)(X) = \sum_j A^{-1}_{ij} \langle DX_j , D(f \circ X) \rangle$
$$= \langle G_i , D(f \circ X) \rangle$$

Lemma Sia $X = (X_1 \dots X_d) \in \mathbb{D}^{1,2}$ con A invertibile q.c. e
$G_i = \sum_j A^{-1}_{ij} DX_j \in \operatorname{dom} \delta$ $\forall i$ $\Rightarrow$ vale (IBP)

<u>Esempi</u> 0) Integrale di Wiener, $h \in L^2([0,T])$

$$W(h) = \int_0^T h_s \, dW_s$$

allora $DW(h) = h$ il criterio dell'esistenza di densità

$h \neq 0$ $G = h$ $\frac{G}{\langle DX, h \rangle} = \frac{h}{|h|^2} \in dom(\delta)$

$$\delta(h) = W(h) \quad \square$$

Se consideriamo $h_1, h_2, \ldots h_d \in L^2([0,T])$

$$A_{ij} = \langle h_i, h_j \rangle_{L^2[0,T]}$$

$(W(h_i))_{i=1}^d$ è v.a. Gaussiana con covarianza

$$Cov(W(h_i), W(h_j)) = \langle h_i, h_j \rangle = A_{ij}$$

densità esiste $\iff$ A è invertibile.

---

1) Integrali di Wiener iterati: $h(s_1, s_2) \in L^2([0,T]^2)$

" $\sum_{s_1, s_2} h(s_1, s_2) (dW_{s_1})(dW_{s_2})$ " Wiener Chaos

---

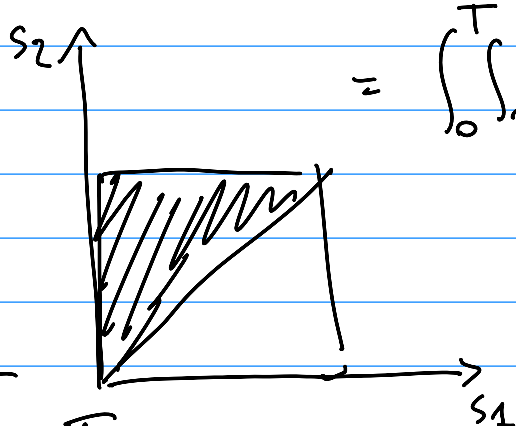
$$X = \int_0^T \left(\int_0^{s_2} h(s_1, s_2) \, dW_{s_1} \right) dW_{s_2} \qquad \left(\mathbb{E}[X] = 0 \right)$$

Isometria di Itô

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_0^{s_2} h(s_1,s_2)\, dW_{s_1}\right)^2 ds_2\right]$$

$$= \int_0^T \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{s_2} h(s_1,s_2)\, dW_{s_1}\right)^2\right] ds_2$$

$$= \int_0^T \int_0^{s_2} h(s_1,s_2)^2\, ds_1\, ds_2$$



$$\int_0^T \cdots \int_0^{s_3}\int_0^{s_2} h(s_1, s_2 \dots s_n)\, dW_{s_1}\, dW_{s_2} \dots dW_{s_n}$$

$$X = \int_0^T \int_0^{s_2} h(s_1,s_2)\, dW_{s_1}\, dW_{s_2}$$

<u>Lemma</u> Sia $(H_s)_{s\in[0,T]} \in M^2$ con

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |DH_s|^2 ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^{s} |D_r H_s|^2 dr\, ds\right] < \infty$$

allora $\int_0^T H_s\, dW_s \in \mathbb{D}^{1,2}$ e

$$D_r\left(\int_0^T H_s\, dW_s\right) = \int_0^T (D_r H_s)\, dW_s + H_r \qquad (r \le T)$$

"Regola $\quad D_r(dW_s) = \delta_0(r-s)$ "

$$D_r = \frac{\partial}{\partial(dW_r)}$$

Dim $\quad \int_0^T H_s \, dW_s = \delta\left((H_s)_{s\in[0,T]}\right)$

$$\boxed{D\,\delta = \delta\, D + \mathrm{Id}}$$

$$X = \int_0^T \left(\int_0^{s_2} h(s_1,s_2)\, dW_{s_1}\right) dW_{s_2}$$

$$D_r X = \int_0^T D_r\left(\int_0^{s_2} h(s_1,s_2)\, dW_{s_1}\right) dW_{s_2} + \int_0^r h(s_1,r)\, dW_{s_1}$$

$$= \int_0^r h(r,s_2)\, dW_{s_2} + \int_0^r h(s_1,r)\, dW_{s_1}$$

3) $\quad W_T^* = \sup_{0\le s\le T} W_s \in \mathbb{D}^{1,2} \qquad D_r W_T^*$