E.D.S.A.

Lezione 15

Il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck

su $\mathbb{R}$

$$dX_t = -X_t\,dt + \sqrt{2}\,dW_t$$
$$X_0 = x$$

$$(T_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f\left(xe^{-t} + \sqrt{1-e^{-2t}}\,y\right)\gamma_1(dy)$$

generatore infinitesimale $\quad Af = -xf' + f''$

---

su $\mathbb{R}^n$

$$d\mathbb{X}_t = -\mathbb{X}_t\,dt + \sqrt{2}\,d\mathbb{W}_t$$
$$\mathbb{X}_0 = x$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $\quad \mathbb{W}_t = (W_t^1, \ldots, W_t^n)$

$$(T_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(xe^{-t} + \sqrt{1-e^{-2t}}\,y\right)\gamma_n(dy)$$

$$(Af)(x) = -x\cdot(\nabla f)(x) + (\Delta f)(x)$$

Si può estendere su uno spazio gaussiano astratto: E di Banach sep., μ misura gaussiana

$f \in C_b(E, \mathbb{R})$ ②

$$(T_t f)(x) = \int_E f\left(x e^{-t} + \sqrt{1-e^{-2t}}\, y\right) \mu(dy)$$

formula di Mehler

"Vera" formula di Mehler (1866)

X, Y gaussiane standard, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \rho$

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} H_k(x) H_k(y)$$

polinomi di Hermite

Funzioni B.V. su $(\mathbb{R}^n, dx)$

f è B.V. $\iff$ esiste una misura vettoriale $Df = (D_1 f, \ldots, D_n f)$ tale che, $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) (D_i f)(dx)$$

$$\|f\|_{BV} = \|Df\| = \sup \left\{ \int f(\operatorname{div} \varphi)\, dx \;\middle|\; \|\varphi\|_\infty \le 1 \right\}$$

$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

Consideriamo ora la misura gaussiana

γ_n : se $f \in C^1$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, \varphi(x)\, \gamma_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) + x_i \varphi \right) d\gamma_n(x)$$

<u>Definizione</u>: $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$ è B.V. se esiste una misura vettoriale $Df = (D_1 f, \dots, D_n f)$ tale che, $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) + x_i \cdot \varphi \right) d\gamma_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left(D_i f \right)(dx)$$

Più in generale, se $a = (a_1, \dots, a_n)$ è una "direzione"

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial a}(x) + \langle a, x \rangle \varphi(x) \right) d\gamma_n(x) =$$

$$= \int \varphi(x) \left(D_a f \right)(dx)$$

dove $(D_a f) = \sum a_i (D_i f) = \langle a, Df \rangle$

Inoltre la variazione di f è la variazione della misura Df, in particolare

$$\sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(\operatorname{div}\varphi + x\cdot\varphi)\, d\gamma_n \;\middle|\; \varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n) \quad \|\varphi\|_\infty \le 1 \right\}$$

$$\varphi_i \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$$

Si può caratterizzare questa proprietà con un opportuno semigruppo?

Occorre un po' più di integrabilità:

$f \in L\log^+L\,(\gamma_n)$

Sia μ una misura finita, e definiamo

$$\log^+(x) = \begin{cases} \log x & x \geq e \\ 1 & x < e \end{cases}$$

$f \in L\log^+L\,(\mu)$ se $\int |f| \cdot \log^+(|f|)\, d\mu < +\infty$

$$L^1(\mu) \subseteq L\log^+L\,(\mu) \subseteq L^p(\mu) \qquad p>1$$

(5)

Supponiamo $f \in C^1$, : $f, f' \in L^1(\gamma_n)$

$$\frac{d}{dx}(T_\sigma f)(x) = e^{-\sigma}(T_\sigma f')(x)$$

$$(T_\sigma f)(x) = \int f(xe^{-\sigma} + \sqrt{1-e^{-2\sigma}}\, y)\, \gamma_n(dy)$$

Ricordato: se $f \in L\log^+ L$, $(T_\sigma f)$ è derivabile

e $\nabla(T_\sigma f) \in L^1(\gamma_n)$

$$\nabla(T_{\tau+s} f) = \nabla(T_\tau T_s f) = e^{-\tau} T_\tau (\nabla(T_s f))$$

$$\|\nabla(T_{\tau+s} f)\|_1 \leq e^{-\tau} \|\nabla T_s f\|_1$$

Quindi, se $f \in L\log^+ L(\gamma_n)$, esiste

$$J(f) = \lim_{\tau \to 0^+} e^{-\tau} \|\nabla T_\sigma f\|_1 = \lim_{\tau \to 0^+} \|\nabla T_\sigma f\|_1$$

$$= \lim_{\tau \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(T_\sigma f)|(x)\, \gamma_n(dx)$$

<u>Teorema:</u> Sia $f \in L\log^+ L$: $f \in BV$ se

$$J(f) = \lim_{\sigma \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla T_\sigma f|(x)\, m(dx) < +\infty$$

e $J(f) = Var(Df)$

La dimostrazione ricalca quella del caso non gaussiano, insisto solo su un punto

Torno alle notazioni della lez. 14
consideriamo le misure $(\nabla P_{\sigma_n} f)\cdot dx$:
poiché sono equilimitate in variazione
(cioè $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla P_{\sigma_n} f(x)|\, dx \leq C$)
esiste una sottosuccessione <u>debolmente</u>
convergente . . . perché?

$C(0,T)$ — duale misure con segno
e variazione finita in $[0,T]$ metrico compatto

su $\mathbb{R}^n$, le misure con segno e variazione finita sono il duale di $C_0(\mathbb{R}^n)$

continue infinitesime all'infinito

$(\nabla P_{\sigma_n} f)(x) \cdot dx$ equilimitate in variazione, esiste sottosuccessione

$(\nabla P_{\sigma_{n_k}} f)(x) \cdot dx \longmapsto Df$

debolmente

Prendendo le misure $(\nabla T_{\sigma_n} f)(x) \cdot \gamma_n(dx)$ si usa lo stesso argomento....

E su uno spazio gaussiano astratto? Limitiamoci al caso dello spazio di Wiener

Ricordiamo la formula di integrazione per parti: F, G lisce

$$E[D_h F \cdot G] = E[-F D_h G + FG W(h)] =$$

$$= E[F(-D_h G + G W(h))]$$

$h \in L^2(0,T) \approx H$

F è B.V. se esiste una misura DF su $(\Omega, \mathcal{F})$ a valori in H e a variazione finita tale che

$$\int_\Omega F(-D_h G + G W(h))\, dP = \int_\Omega G\, (D_h F)(d\omega)$$

dove $(D_h F)(A) = \langle h, DF(A) \rangle_H$

---

se $F \in L\log^+ L$, vale una caratterizzazione col semigruppo di O.U.