Lezione 14

Funzioni a variazione limitata (B.V.)

caso $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

f è a variazione limitata se

$$\sup_{\tau_1<\tau_2<\dots<\tau_n} \sum \left| f(\tau_j) - f(\tau_{j-1}) \right| = \mathrm{Var}(f) < +\infty$$

(si può supporre f continua a destra)

In tal caso esiste una e una sola misura con segno $Df : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{R}$ tale che

$$Df\left(]a,b]\right) = f(b) - f(a)$$

preso $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, si ha

$$\int f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int \varphi(x)\,(Df)(dx)$$

inoltre

$$\mathrm{Var}(f) = \mathrm{Var}(Df) = \sup_{\varphi\in C^1_c(\mathbb{R})} \left\{ \int f(x)\,\varphi'(x)\,dx : \|\varphi\|_\infty \le 1 \right\}$$

Cioè

$$\boxed{\begin{array}{c} f \in B.V. \\ \Updownarrow \\ \exists \; Df \text{ tale che } \quad \int f\varphi\,dx = -\int \varphi(x)\,(Df)(x) \end{array}}$$

Come definire funzione B.V. quando $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$?

<u>Definizione</u> (Fichera - De Giorgi) si chiama B.V. una funzione <u>avente derivata misura</u> più precisamente

f è B.V. $\iff$ $\exists$ una misura vettoriale $Df = (D_1 f, \dots, D_n f)$ tale che, $\forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,(D_j f)(dx)$$

inoltre

$$\|f\|_{BV} = \sup \left\{ \int f\,(\operatorname{div}\varphi)\,dx \;\middle|\; \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \text{ e } \|\varphi\|_\infty \le 1 \right\}$$

c'è un risultato dovuto a De Giorgi (1954), uso le sue notazioni

poniamo, per $\lambda > 0$

$$W_\lambda f(x) = (\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x + \sqrt{\lambda}\,\xi)\, e^{-|\xi|^2}\, d\xi$$

si verifica che $\lambda \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla W_\lambda f(x)|\, dx$

è decrescente, e sia $I(f) = \lim_{\lambda \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla W_\lambda f(x)|\, dx$

<u>Teorema</u> f è B.V. $\Longleftrightarrow$ $I(f) < +\infty$

e in tal caso

$$I(f) = \mathrm{Var}(f)$$

Interpretiamo questo risultato in termini probabilistici.

Richiamo su semigruppo di transizione

$$dX_t = a(X_t)\,dt + b(X_t)\,dW_t$$
$$X_0 = x$$

esiste un semigruppo di operatori $(P_t)_{t\geq 0}$

tale che per $s<t$

$$E[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}_s] = (P_{t-s}f)(X_s)$$

e il generatore infinitesimale A è

$$Af = \lim_{t \to 0+} \frac{P_t f - f}{t} \qquad \left(\mathcal{D}(A) = \{ f \text{ per le quali esiste il limite} \}\right)$$

$$(P_t f)(x) = E[f(X_t^x)]$$

soluzione che parte da x al tempo 0

Semigruppo di transizione del processo di Wiener $(W_t)_{t\geq 0}$.

$$dX_t = dW_t \qquad \Rightarrow \qquad X_t = x + W_t$$
$$X_0 = x$$

$$(P_\tau f)(x) = E\left[f(x+W_\tau)\right] =$$

$$= E\left[f(x+\sqrt{\tau}\,Y)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x+\sqrt{\tau}\,y)\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

$N(0,1)$ → Y

In $\mathbb{R}^n$, $(P_\tau f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x+\sqrt{\tau}\,y)\, e^{-\frac{|y|^2}{2}}\, dy$

<u>Attenzione</u> $(P_\tau f) = (W_{2\tau} f)$

↑ notazione di De Giorgi

<u>Conseguenza</u>: $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$f \in B.V. \iff \lim_{\tau \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla P_\tau f(x) \right| dx < +\infty$$

ma noi lo dimostriamo indipendentemente.
Per semplicità facciamo tutto in una dimensione, ma è tutto vero in $\mathbb{R}^n$

Proprietà del semigruppo $(P_\sigma)_{\sigma \geq 0}$

a) P_σ è una contrazione (debole) su $L^p(\mathbb{R}^n)$

cioè $\quad \| P_\sigma f \|_{L^p} \leq \| f \|_{L^p}$

b) P_σ è simmetrico su $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\langle P_\sigma f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle f, P_\sigma g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

c) il generatore infinitesimale è $\frac{1}{2} \Delta$.

Conviene riscrivere P_σ come convoluzione

$$(P_\sigma f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x + \sqrt{\sigma}\, y)\, e^{-y^2/2}\, dy \qquad \sqrt{\sigma}\, y = -z$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int f(x - z)\, e^{-z^2/2\sigma}\, dz = (f * \rho_\sigma)(x)$$

dove $\rho_\sigma(z) = \dfrac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma}}}{\sqrt{2\pi\sigma}}$

su $\mathbb{R}^n$, $\quad \rho_\sigma(z) = (2\pi\sigma)^{-\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{|z|^2}{2\sigma}}$

a) conseguenza del fatto che $\rho_\tau(\cdot)$ è una densità di probabilità e

$$\left| \int f(x-y)\, \rho_\tau(y)\, dy \right|^p \leq \int |f(x-y)|^p \rho_\tau(y)\, dy$$

b) conseguenza del fatto che $\rho_\tau(z) = \rho_\tau(-z)$

$$\langle P_\tau f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)} = \int dx\, g(x) \int f(x-y)\, \rho_\tau(y)\, dy =$$

$$= \int dx\, g(x) \int f(z)\, \rho_\tau(x-z)\, dz =$$

$$= \int dz\, f(z) \int \rho_\tau(z-x)\, g(x)\, dx = \langle f, P_\tau g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)}$$

c) è un risultato classico

$$f(x+W_\tau) = f(x) + \int_0^\tau f'(x+W_s)\, dW_s + \frac{1}{2} \int_0^\tau f''(x+W_s)\, ds$$

$$\frac{P_\tau f(x) - f(x)}{\tau} = \frac{E[f(x+W_\tau)] - f(x)}{\tau} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\tau} \int_0^\tau E[f''(x+W_s)]\, ds \longrightarrow \frac{1}{2} f''(x)$$

Col semigruppo di convoluzione che usa De Giorgi il generatore infinitesimale è Δ.

Guardiamo ora il processo di O.U.

$$dX_t = -a X_t\,dt + b\,dW_t$$

$$X_0 = x \qquad (a>0,\ b>0)$$

soluzione $\quad X_t = e^{-at}x + b e^{-at}\cdot\int_0^t e^{as}\,dW_s$

Sia $(T_t)_{t\geq 0}$ il semigruppo di transizione

$$(T_t f)(x) = E\left[f\left(x e^{-at} + \underbrace{b e^{-at}\int_0^t e^{as}\,dW_s}\right)\right]$$

gaussiana media 0 varianza

$$b^2 e^{-2at}\cdot\int_0^t e^{2as}\,dW_s = \frac{b^2}{2a}\left(1-e^{-2at}\right)$$

quindi

$$(T_t f)(x) = E\left[f\left(x e^{-at} + \frac{b}{\sqrt{2a}}\sqrt{1-e^{-2at}}\,Y\right)\right]$$

Ci poniamo le stesse domande però rispetto alla misura γ_n (gaussiana standard)

a) quando è una contrazione su $L^2(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$?

b) per quali valori di a e b, T_t è simmetrico su $L^2(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$?

c) chi è il generatore infinitesimale di $(T_t)_{t>0}$?

Cominciamo con b) (per semplicità dimensione 1)

$$\langle T_t f, g\rangle_{L^2(\gamma_1)} = \int g(x) \int f\left(xe^{-at} + \frac{b}{\sqrt{2a}}\sqrt{1-e^{-2at}}\,y\right) \gamma_1(dy)\,\gamma_1(dx)$$

$$= E\left[g(X)\cdot f\left(Xe^{-at} + \frac{b}{\sqrt{2a}}\sqrt{1-e^{-2at}}\,Y\right)\right]$$

dove X, Y sono gaussiane standard indipendenti

$$\langle f, T_t g\rangle_{L^2(\gamma_1)} = E\left[f(X)\, g\left(Xe^{-at} + \frac{b}{\sqrt{2a}}\sqrt{1-e^{-2at}}\,Y\right)\right]$$

c'è eguaglianza se hanno le stesse legge

$$\left(X,\ Xe^{-at} + \frac{b}{\sqrt{2a}}\sqrt{1-e^{-2at}}\,Y\right)$$

$$\left(Xe^{-at} + \frac{b}{\sqrt{2a}}\sqrt{1-e^{-2at}}\,Y,\ X\right)$$

e questo succede se

$$e^{-2a\sigma} + \frac{b^2}{2a}\left(1 - e^{-2a\sigma}\right) = 1 \, , \quad \text{cioè se}$$

$$\boxed{b^2 = 2a}$$

a) se $b^2 = 2a$ è facile verificare che T_σ è

una contrazione su $L^2(\gamma_n)$

c) il generatore infinitesimale è

$$Af(x) = -a\, x \cdot f'(x) + \frac{b^2}{2} f''(x)$$

Vediamo il punto c)

$$f(X_\sigma^x) = f(x) + \int_0^\sigma f'(X_s^x)\left(-a X_s^x\, ds + b\, dW_s\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\sigma f''(X_s^x)\, b^2\, ds \, , \quad \text{quindi}$$

$$\frac{E\left[f(X_\sigma^x)\right] - f(x)}{\sigma} = -\frac{a}{\sigma} \int_0^\sigma E\left[X_s^x f'(X_s^x)\right] ds +$$

$$+ \frac{b^2}{2\sigma} \int_0^\sigma E\left[f''(X_s^x)\right] ds$$

Ricordiamo la condizione $b^2 = 2a$

Se si pone $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, il generatore infinitesimale diventa

$$Af = -xf' + f''$$

Ricordiamo $D : f \mapsto f'$ su $L^2(\gamma_1)$

$$L = D^* D = xf' - f'' \quad \Big(\underbrace{x \cdot \nabla f - \Delta f}_{\text{su } \mathbb{R}^n} \Big)$$

quindi $A = -L$

In altri termini il processo O.U. è definito dall'equazione

$$dX_t = -\frac{X_t}{2} dt + dW_t$$

Veniamo alla dimostrazione del

Teorema di De Giorgi

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$: $f \in B.V.$ se e solo se

$\lim_{\tau \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla P_\tau f(x)|\,dx < +\infty$ e in tal caso

$$I(f) = \lim_{\tau \to 0^+} \int \cdots \cong \|f\|_{BV}$$

Cominciamo a osservare che, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$(P_\tau f)$ è derivabile, inoltre se $(\nabla f) \in L^1$

si ha $\nabla(P_\tau f) = P_\tau(\nabla f)$

a dimensione 1, $\frac{d}{dx}(P_\tau f) = P_\tau f'$

e questo perché

$$(P_\tau f)(x) = \int f(x-y)\,\rho_\tau(y)\,dy = \int \rho_\tau(x-y)\,f(y)\,dy$$

Poiché $\nabla(P_{\tau+s} f) = \nabla(P_\tau P_s f) = P_\tau(\nabla P_s f)$

e P_τ è una contrazione su L^1, $\|\nabla(P_{\tau+s} f)\| \leq$

$\leq \|\nabla P_s f\|$

e quindi, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, esiste

$$I(f) = \lim_{\sigma \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \| \nabla P_\sigma f \| \, dx \in [0, +\infty]$$

Supponiamo f a variazione limitata

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} P_\sigma f\right)(x) = \int \frac{\partial}{\partial x} \rho_\sigma(x-y) f(y)\, dy =$$

$$= -\int \frac{\partial}{\partial y} \rho_\sigma(x-y) f(y)\, dy = \int \rho_\sigma(x-y) (Df)(dy)$$

quindi

$$\int \left| \frac{\partial}{\partial x} P_\sigma f \right|(x)\, dx \leq \int dx \int \rho_\sigma(x-y)\, |Df|(dy)$$

$$= \int |Df|(dy) \int \rho_\sigma(x-y)\, dx = \int |Df|(dy) = \|f\|_{BV}$$

Supponiamo viceversa $I(f) < +\infty$: prendiamo $\sigma_n \downarrow 0$ e consideriamo le misure $\frac{d}{dx}(P_{\sigma_n} f) \cdot dx$

densità

sono equi limitate in variazione

quindi esiste una sottosuccessione strett. convergente

Così esiste $Df = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx}(P_{\sigma_n} f) \cdot dx$

nel senso che, preso g continua e limitata

$$\lim_{n\to\infty} \int g(x) \cdot \frac{d}{dx}(P_{\sigma_n} f)\, dx = \int g(x)\,(Df)(dx)$$

quindi, se $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int f \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int (P_{\sigma_n} f) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} - \int \varphi \frac{d}{dx}(P_{\sigma_n} f)\, dx = -\int \varphi(x)\,(Df)(dx)$$

Inoltre, se $\|\varphi\|_\infty \leq 1$

$$\int f \cdot \varphi'(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int (P_{\sigma_n} f)\, \varphi'\, dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int -\frac{d}{dx}(P_{\sigma_n} f) \cdot \varphi\, dx \leq I(f)$$

Ho dato per scontato questo fatto: se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$(P_\sigma f) \xrightarrow{\sigma \to 0} f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ (vale in L^p con $1 \leq p < +\infty$)

Ma se f è continua e limitata, la convergenza è uniforme (semigruppo di classe C_0), poi si sfrutta il fatto che C_c^0 è denso in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e il fatto che P_t è una contrazione.