E.D.S.A. 

# Lezione 13

## La divergenza o integrale di Skorohod

Richiamo sull'aggiunto di un operatore

$X, Y$ spazi di Banach

$A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longmapsto Y$ con $\mathcal{D}(A)$ denso in $X$

definiamo $A^* : \mathcal{D}(A^*) \subseteq Y^* \longmapsto X^*$

<u>Definizione</u> $y^* \in \mathcal{D}(A^*)$ se l'applicazione

$x \longmapsto \langle Ax, y^* \rangle_{\langle Y, Y^* \rangle}$ è continua su $\mathcal{D}(A)$

rispetto alla norma di $X$, e in tal caso

$x^* = A^* y^*$ è l'unico elemento di $X^*$

tale che

$$\langle Ax, y^* \rangle_{\langle Y, Y^* \rangle} = \langle x, x^* \rangle_{\langle X, X^* \rangle}$$

cioè $\langle Ax, y^* \rangle = \langle x, A^* y^* \rangle$

se $X, Y$ sono di Hilbert, $X = X^*$ e $Y = Y^*$

Definizione di divergenza

Preso $D : \mathcal{D}(D) \subseteq L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega \times [0,T])$

si chiama **divergenza** l'operatore aggiunto

$$D^* : \mathcal{D}(D^*) \subseteq L^2(\Omega \times [0,T]) \mapsto L^2(\Omega)$$

Caratterizzazione: $Z \in L^2(\Omega \times [0,T])$ appartiene a $\mathcal{D}(D^*)$ se

$F \mapsto E\left[\int_0^T D_s F \, Z_s \, ds\right]$ è continua con la norma di $L^2(\Omega)$ e $G = D^*(Z)$ è tale che

$$\langle DF, Z \rangle_{L^2(\Omega \times [0,T])} = E\left[\int_0^T D_s F \, Z_s \, ds\right] =$$

$$= E[FG] = \langle F, D^* Z \rangle_{L^2(\Omega)}$$

**Teorema** (divergenza e integrale di Itô)
Se $H$ è progr. misurabile e $E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < +\infty$,
$H \in \mathcal{D}(D^*)$ e $\quad D^* H = \int_0^T H_s \, dW_s$

Bisogna provare

$$E\left[\int_0^T D_s F\, H_s\, ds\right] = E\left[F \cdot \int_0^T H_s\, dW_s\right]$$

e basta provarlo se $F = \mathcal{E}(h)$ (gli esponenziali di Wiener sono un insieme totale su $L^2(\Omega)$)

$$E\left[\mathcal{E}(h) \int_0^T h(s)\, H_s\, ds\right] = E\left[\mathcal{E}(h) \int_0^T H_s\, dW_s\right]$$

equivale a

$$E\left[\mathcal{E}(h) \int_0^T H_s\, (dW_s - h(s)\, ds)\right] = 0$$

ma sotto la probabilità che ha densità $\mathcal{E}(h)$, $\left(W_t - \int_0^t h(s)\, ds\right)$ è un processo di Wiener.

<u>Osservazione</u>: bisogna prima supporre

$$E^*\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right] < +\infty$$

$\hookrightarrow$ rispetto alla probabilità $P^* = \mathcal{E}(h) \cdot P$

e poi si estende per continuità.

La divergenza è chiamata anche <u>integrale di Skorohod</u> e indicata

$D^*(Z)$ o anche $\delta(Z)$ o $\int_0^T Z_s \, \delta W_s$.

---

L'integrale di Skorohod non è limite di somme di Riemann.

<u>Formula</u>:

$$\int_0^T (F Z_s)\, \delta W_s = F \int_0^T Z_s \, \delta W_s - \int_0^T D_s F \cdot Z_s \, ds$$

<u>Ipotesi</u>: $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, $Z \in \mathcal{D}(D^*)$

e $E\left[F^2 \left(\int_0^T Z_s \, \delta W_s\right)^2 + \left(\int_0^T D_s F \, Z_s \, ds\right)^2\right] < +\infty$

---

In particolare, se $H$ è progressivamente misurabile, la formula diventa

$$\int_0^T (F H_s)\, \delta W_s = F \int_0^T H_s \, dW_s - \int_0^T D_s F \, H_s \, ds$$

Basta provare la formula per $F$ liscio; poiché $G$ liscio, si ha

$$\langle DG, F Z_s \rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} = \langle F\, DG, Z_s \rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} =$$

$$= \langle D(FG) - G\,DF, Z \rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} =$$

$$= \langle FG, \delta(Z) \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle DF, GZ \rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} =$$

$$= E\left[ G \left( F \int_0^T Z_s\, \delta W_s - \int_0^T D_s F\, Z_s\, ds \right) \right]$$

---

La formula di Clark-Ocone-Karatzas

Sappiamo che, poiché $F \in L^2(\Omega)$, si ha

$$F = E[F] + \int_0^T H_s\, dW_s$$ con un unico $H$ progressiv. misurabile con $E\left[\int_0^T H_s^2\, ds\right] < +\infty$

Ma come si può rappresentare $H$?

<u>Formula usuale</u>: supponiamo $F \in \mathbb{D}^{1,2}$,

allora $F = E[F] + \int_0^T E[D_s F \mid \mathcal{F}_s]\, dW_s$

Così è formulato ad esempio nel libro di Nualart, ma in questo forma è formulato male.

<u>Teorema preciso</u> (C.O.K.) Sia $F \in \mathbb{D}^{1,2}$:

allora $F = E[F] + \int_0^T H_s\, dW_s$ dove $H$ è la proiezione ortogonale di $DF$ nel sottospazio chiuso $L^2(\Omega \times [0,T]; \mathcal{P}; d\mathbb{P} \otimes dt)$

(σ-algebra prevedibile)

e in particolare si ha, per quasi ogni $s$,

$$H_s = E[D_s F \mid \mathcal{F}_s] \text{ q.c.}$$

Dimostrazione: La prima parte è facile

possiamo supporre $E[F]=0$, e indichiamo

$\mathcal{M}^2 = L^2(\Omega\times[0,T], \mathcal{P}, d\mathbb{P}\otimes dt)$

Preso $K \in \mathcal{M}^2$, poiché $F = \int_0^T H_s\, dW_s$

$$E\left[F \cdot \left(\int_0^T K_s\, dW_s\right)\right] = E\left[\int_0^T H_s K_s\, ds\right]$$

ma poiché $\int_0^T K_s\, dW_s = \delta(K)$ si ha

$$E\left[F\left(\int_0^T K_s\, dW_s\right)\right] = E\left[\int_0^T D_s F\ K_s\, ds\right]$$

cioè, $\forall K \in \mathcal{M}^2$

$$E\left[\int_0^T D_s F\ K_s\, ds\right] = E\left[\int_0^T H_s K_s\, ds\right]$$

Per la seconda parte, vedo appunti

Attenzione: sono equivalenti

formula di Clark-Ocone-Karatzas

$\Updownarrow$

se $K_s$ è progressiv. misurabile $\int_0^T K_s\, \delta W_s = \int_0^T K_s\, dW_s$

Due proprietà di $D$

<u>Proposizione</u> Supponiamo $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ e che sia $\mathcal{F}_t$ misurabile: allora $D_s F$ è $\mathcal{F}_t$ misurabile e $D_s F = 0$ per $s > t$.

---

Si prova facilmente sugli esponenziali di Wiener $W(h)$.

---

<u>Formula:</u>

$$D_t \left( \int_0^T Z_s \, \delta W_s \right) = Z_t + \int_0^T D_t Z_s \, \delta W_s$$

in particolare se $H_s$ è progress. misurabile

$$D_t \left( \int_0^T H_s \, dW_s \right) = H_t + \int_t^T D_t H_s \, dW_s$$

---

Le ipotesi sono nella pagina successiva

Ipotesi:

a) $\forall \tau, \quad Z_\tau \in \mathbb{D}^{1,2}$

b) esiste una versione di $D_s Z_\tau(\omega)$

misurabile su $\Omega \times [0,T] \times [0,T]$

c) $\int_0^T \| Z_s \|^2_{\mathbb{D}^{1,2}} \, ds < +\infty$

allora $\delta(Z) \in \mathbb{D}^{1,2}$ e

$$D_\tau \left( \int_0^T Z_s \, \delta W_s \right) = Z_\tau + \int_0^T D_\tau Z_s \, \delta W_s$$