E.D.S.A.

Lezione 12

Calcolo di Malliavin su $\mathbb{R}^n$

Sia $\mathcal{S}$ lo "spazio di Schwartz" (funzioni C^∞ tali che, $\forall$ multiindice α e potenza β

$(D^\alpha f(x) \cdot \|x\|^\beta) \leq C_{\alpha,\beta}$) presa $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)\, \varphi(\cdot)\, dx_1 \dots dx_n = -\int_{\mathbb{R}} f(\cdot)\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\cdot)\, dx_1 \dots dx_n$$

Dunque l'operatore gradiente $\nabla : \mathcal{S} \to \mathcal{S}^n$

$(\nabla f)(\cdot) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ ha come

aggiunto la divergenza $-\operatorname{div}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = -\sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$

e $\operatorname{div} \circ \nabla = -\Delta$ dove

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Riprendiamo tutto in $(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$ dove γ_n è la misura gaussiana standard questa volta $\mathcal{P}$ è lo spazio delle funzioni C^∞ tali che ogni derivata è a crescita al più polinomiale.

Sia $D : f \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$

$D : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, \varphi(x)\, d\gamma_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \left(\varphi(x) \frac{e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}}{(2\pi)^{n/2}} \right) dx =$$

$$= -\int f \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varphi \frac{e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}}{(2\pi)^{n/2}} \right) dx =$$

$$= \int f \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + x_i \varphi \right) \frac{e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}}{(2\pi)^{n/2}}\, dx =$$

$$= \int f \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + x_i \cdot \varphi \right) d\gamma_n(x)$$

Di conseguenza l'operatore aggiunto

$D^*: P^n \longmapsto P$ è

$$D^*(g_1, \dots, g_n) = -\sum \frac{\partial g_i}{\partial x_i} + \sum x_i \cdot g_i =$$

$$= -\operatorname{div}(g) + x \cdot g$$

e posto $L = D^* D$ si ha

$$(L f)(x) = -\Delta f(x) + x \cdot \nabla f(x)$$

Preso $a = (a_1, \dots, a_n)$ se $D_a f = \sum a_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} (D_a f)\, g \, d\gamma_n = \int_{\mathbb{R}^n} \left[-f D_a g + f g \, x \cdot a \right] d\gamma_n$$

la variabile $x \longmapsto x \cdot a$ è $N(0, \|a\|^2)$

Derivate su uno spazio di Banach

Derivata di Fréchet

$A \in \mathcal{L}(X,Y)$

tale che

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{\|h\|} = 0$$

Derivata di Gateaux

$A \in \mathcal{L}(X,Y)$

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{f(x+\tau h) - f(x) - \tau Ah}{\tau} = 0$$

La derivata di Malliavin è una specie di derivata di Gateaux, ma solo lungo le direzioni dello spazio di Cameron-Martin.

Proseguiamo intuitivamente

$\Omega = C_0([0,T], \mu) \leftarrow$ spazio di Wiener

$h^*(t) = \int_0^t h(s)\,ds \quad , \quad h \in L^2(0,T)$

$F \in L^2(\Omega)$ derivabile se esiste $Z_s(\omega) \in L^2(\Omega, L^2(0,T))$

tale che, preso $h \in L^2(0,T)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\omega + \varepsilon h^*) - F(\omega)}{\varepsilon} = \int_0^T Z_s(\omega)\, h(s)\, ds$$

Preso $k \in L^2(0,T)$ e $W(k)(\omega) = \left(\int_0^T k(s)\, dW_s\right)(\omega)$

si ha

$$W(k)(\omega + \varepsilon h^*) = W(k)(\omega) + \varepsilon \int_0^t h(s)\, k(s)\, ds$$

e quindi la derivata dovrebbe essere

$$Z_s(\omega) = k(s)$$

o anche $D\,W(k) = k$

Derivata di Malliavin sullo spazio di Wiener classico

Funzioni lisce $\mathcal{L}$ $\qquad F : \Omega \to \mathbb{R}$

$$F = \varphi\big(W(h_1), \dots, W(h_n)\big)$$

$h_1, \dots, h_n \in L^2(0,T)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che tutte le sue derivate sono a crescita al più esponenziale

Definizione di derivata

$$D : \mathcal{L} \subseteq L^2(\Omega) \longmapsto L^2(\Omega, L^2(0,T)) \quad \big(= L^2(\Omega, H)\big)$$

$$DF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\big(W(h_1), \dots, W(h_n)\big) \otimes h_i$$

cioè

$$D_t F(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\big(W(h_1), \dots, W(h_n)\big)(\omega)\, h_i(t)$$

e, se $h \in L^2(0,T)$

$$D_h F = \int_0^T D_s F \cdot h(s)\, ds$$

<u>Formula di integrazione per parti</u>

(Gaveaux-Trauber)

$F, G \in \mathcal{L}$, $h \in L^2(0,T)$ $\quad (L^2(0,T) \sim H)$

$$E\left[D_h F \cdot G\right] = E\left[-F \cdot D_h G + F G \, W(h)\right]$$

E' conseguenza di queste due formule

$$* \quad D_h(FG) = (D_h F) \cdot G + F \cdot (D_h G) \quad \text{(ovvio)}$$

$$** \quad E\left[D_h F\right] = E\left[F \cdot W(h)\right]$$

Limitiamoci sulla seconda, possiamo supporre

$F = \varphi(W(h_1), \dots, W(h_n))$ $\quad h_1, \dots, h_n$ ortonormali su $L^2(0,T)$

e sia $a_i = \langle h_i, h \rangle_{L^2(0,T)}$

(cioè supponiamo che $h = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i$)

$$D_h F = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\cdots) \cdot a_i$$

$$E[D_h F] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(W(e_1), \ldots, W(e_n)) \, a_i\right] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\cdots) \, a_i \, d\gamma_n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\cdots) \sum a_i . x_i \, d\gamma_n = E\left[F . \sum a_i W(e_i)\right]$$

$$= E[F . W(h)]$$

Un operatore $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \longmapsto Y$ è chiuso se il suo grafico è chiuso

cioè se:

$$\left.\begin{array}{l} x_n \longmapsto x \\ A x_n = y_n \to y \\ x_n \in \mathcal{D}(A) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \in \mathcal{D}(A) \text{ e} \\ A x = y \end{array}$$

Un operatore è detto chiudibile se ha una estensione chiusa cioè se

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in \mathcal{D}(A) \\ x_n \mapsto 0 \\ y_n = Ax_n \to y \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = 0$$

In tal caso chiusura di A è la minima estensione chiusa.

<u>Proposizione</u> (corollario formula integrazione per parti) L'operatore $D : \mathcal{S} \subseteq L^2(\Omega) \to$
$\to L^2(\Omega, L^2(0,T)) \ \left(= L^2(\Omega \times [0,T])\right)$
è chiudibile.

<u>Dimostrazione</u> Occorre provare che:

$$\left.\begin{array}{l} \text{se } F_n \mapsto 0 \quad L^2(\Omega) \\ DF_n \mapsto Z \text{ in } L^2(\Omega\times[0,T]) \end{array}\right. \Rightarrow \quad Z \equiv 0$$

cioè $\forall\, Y \in L^2(\Omega \times [0,T])$ si ha

$$\iint_{\Omega\times[0,T]} Z\, Y \, dP\, ds = 0$$

e basta provarlo se

$$Y(\omega, s) = G(\omega)\, h(s) \qquad G \in \mathcal{S},\ h \in L^2(0,T)$$

$$\iint_{\Omega\times[0,T]} Z(\omega,s)\, G(\omega)\, h(s)\, dP(\omega)\, ds =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega\times[0,T]} D_s F_n(\omega)\, G(\omega)\, h(s)\, dP(\omega)\, ds =$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\left[(D_h F_n) G\right] = \lim_{n\to\infty} \left(E\left[-F_n D_h G\right] + E\left[F_n G\, W(h)\right]\right)$$

$$= 0$$

Consideriamo la <u>chiusura</u> dell'operatore D e sia $\mathbb{D}^{1,2}$ il suo dominio:

$\mathbb{D}^{1,2}$ è la chiusura di $\mathcal{S}$ rispetto alla norma

$$\|F\|_{\mathbb{D}^{1,2}} = \left(\int_\Omega F^2 \, dP + \int_\Omega dP \int_{[0,T]} (D_s F)^2 \, ds \right)^{1/2}$$

cioè $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ se esistono $F_n \in \mathcal{S}$ con

$$\left.\begin{array}{l} F_n \longmapsto F \quad \text{in } L^2(\Omega) \\ DF_n \longmapsto Z \quad \text{in } L^2(\Omega \times [0,T]) \end{array}\right\} \Rightarrow DF = Z$$

<u>Spazio</u> $\mathbb{D}^{1,p}$: chiusura di $\mathcal{S}$ rispetto alla norma

$$\left(\int_\Omega |F|^p \, dP + \int_\Omega \left(\int_{[0,T]} (D_s F)^2 \, ds \right)^{p/2} dP \right)^{1/p}$$

<u>Attenzione</u> : $DF \in L^p(\Omega, L^2(0,T)) =$

$= L^p(\Omega, H)$

Regole della catena

$$D_s\varphi(F_1,\dots,F_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(F_1,\dots,F_n)\cdot D_s F_i$$

Proposizione Supponiamo $F_n \in \mathbb{D}^{1,2}$

$$\left.\begin{array}{l} F_n \mapsto F \text{ in } L^2(\Omega) \\ (DF_n) \text{ limitato in } L^2(\Omega\times[0,T]) \end{array}\right\} \Rightarrow F \in \mathbb{D}^{1,2}$$

$\mathbb{D}^{1,2}$ spazio di Hilbert

successione limitata = debolmente relativamente compatta

$\exists\ F_{n_k} \mapsto G$ in $\mathbb{D}^{1,2}$ debolmente

$\Rightarrow F_{n_k} \mapsto G$ debolmente in $L^2(\Omega)$

quindi $G = F$

Una caratterizzazione:

$F \in \mathbb{D}^{1,2}$ e $DF = Z$ se e solo se

$F \in L^2(\Omega)$ ed esiste $Z \in L^2(\Omega \times [0,T])$

tale che, $\forall\, G \in \mathcal{L}$ ed $h \in L^2(0,T)$

valga la formula

$$E\left[-F D_h G + F G\, W(h)\right] =$$

$$= E\left[\left(\int_0^T Z_s\, h(s)\, ds\right) \cdot G\right]$$

Suggerimento: l'operatore (definito su $\mathcal{L}$)

$F \longrightarrow Z$ è chiudibile e coincide

con DF

Un altro possibile approccio:

$h \in L^2(0,T)$ $\qquad \mathcal{E}(h) = \exp\left(W(h) - \frac{1}{2}\|h\|^2\right) =$

$= \exp\left(h^*(h^*) - \frac{1}{2}\|h^*\|_H^2\right)$

dove $h^*(\sigma) = \int_0^\sigma h(s)\,ds$

Preso $k \in L^2(0,T)$, si ha

$D_k \mathcal{E}(h) = \mathcal{E}(h) \langle h, k \rangle_{L^2(0,T)} = \mathcal{E}(h) \langle h^*, k^* \rangle_H$

Le funzioni $\mathcal{E}(h)$ sono dette esponenziali di Wiener e le loro combinazioni lineari sono i polinomi esponenziali (densi in $L^2(\Omega)$)

Si può definire D sui polinomi esponenziali e poi considerare la chiusura...