E.D.S.A.

Lezione 11

Spazi funzionali generali

Alcune questioni di misurabilità

Sia E uno spazio di Banach: si chiama σ-algebra di Borel la σ-algebra $\mathcal{B}$ generata dagli aperti, e σ-algebra di Baire la più piccola σ-algebra $\mathcal{E}$ che rende misurabili le applicazioni $x \mapsto \langle x^*, x \rangle$, con $x^* \in E^*$.

<u>Risultato</u>: se E è separabile, $\mathcal{B}(E) = \mathcal{E}(E)$.

Una funzione $f : (\Omega, \mathcal{F}, m) \mapsto E$ è detta <u>debolmente misurabile</u> se è $\mathcal{E}$-misurabile e <u>fortemente misurabile</u> se è $\mathcal{B}$-misurabile

Teorema (Pettis) Una funzione fortemente misurabile è limite puntuale di funzioni semplici.

Integrale di Bochner: Se $f:(\Omega,\mathcal{F},m) \longmapsto E$ è fortemente misurabile e $\int_E \|f\|\, dm < +\infty$, è definito $\int_E f\, dm$ e si ha

$$\left\| \int_E f\, dm \right\| \leq \int_E \|f\|\, dm.$$

<u>Definizione</u> Sia E uno spazio di Banach (separabile): una <u>probabilità</u> μ su $\mathcal{B}$ è detta <u>misura gaussiana</u> se, $\forall x^* \in E^*$, $x \mapsto \langle x^*, x \rangle$ è una variabile gaussiana (centrata).

<u>Osservazione</u> una misura gaussiana è sempre concentrata su un sottospazio separabile.

<u>Teorema fondamentale</u> (Fernique): se μ è una misura gaussiana centrata, esiste ε_0 tale che, se $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\int_E \exp\left(\varepsilon \, \|x\|^2\right) \mu(dx) < +\infty$$

(in particolare la variabile $\|x\|$ possiede tutti i momenti).

Il teorema di Fernique si basa su questa proprietà delle variabili gaussiane: se X e Y

sono gaussiane indipendenti equidistribuite, la legge di (X, Y) è uguale alla legge di $\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)$.

In generale, per ogni ϑ con $0 \leq \vartheta < \pi$

$$(X, Y) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X \cos\vartheta + Y \operatorname{sen}\vartheta, X \operatorname{sen}\vartheta - Y \cos\vartheta)$$

Una variabile $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longmapsto E$ è detta gaussiana se, $\forall x^* \in E^*$, $\langle x^*, X \rangle$ è gaussiana

Notiamo che sono equivalenti

μ è una misura gaussiana su $(E, \mathcal{B})$ $\iff$ la variabile $X : E \mapsto E$ definita da $X(x) = x$ è una variabile gaussiana

<u>Teorema</u>: Sia μ una misura gaussiana (centrata) e V un sottospazio (misurabile) di E: $\mu(V) \lessgtr {0 \atop 1}$

<u>Dimostrazione</u> Su $E \times E$ con la prob. $\mu \otimes \mu$

definiamo, per $0 \leq \vartheta < \pi$

$$A(\vartheta) = \left\{ (x_1, x_2) \mid (x_1 \cos\vartheta + x_2 \operatorname{sen}\vartheta) \in V,\ (x_1 \operatorname{sen}\vartheta - x_2 \cos\vartheta) \notin V \right\}$$

Si prova che:

a) $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$, $\quad A(\vartheta_1) \cap A(\vartheta_2) = \emptyset$

b) gli $A(\vartheta)$ sono tutti equiprobabili, quindi

$$(\mu \otimes \mu)(A\vartheta) = (\mu \otimes \mu)(A_0)$$

necessariamente questo numero è 0

$$0 = \mu \otimes \mu\,(A_0) = \mu \otimes \mu\,(V \times V^c) = \mu(V)(1 - \mu(V))$$

Proviamo a): supponiamo di avere $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$

e x_1, x_2 tali che

$(x_1 \cos\vartheta_1 + x_2 \operatorname{sen}\vartheta_1) \in V$

$(x_1 \cos\vartheta_2 + x_2 \operatorname{sen}\vartheta_2) \in V$

poiché $\begin{vmatrix} \cos\vartheta_1 & \operatorname{sen}\vartheta_1 \\ \cos\vartheta_2 & \operatorname{sen}\vartheta_2 \end{vmatrix} \neq 0$

x_1 e x_2 appartengono entrambi a V ma allora vi appartiene anche $(x_1 \operatorname{sen}\vartheta_1 - x_2 \cos\vartheta_1)$

b) È una conseguenza delle proprietà caratteristiche delle variabili gaussiane: siano

$X_1(x_1, x_2) = x_1$ e $X_2(x_1, x_2) = x_2$

(X_1, X_2) è distribuito come

$(X_1 \cos\vartheta + X_2 \operatorname{sen}\vartheta,\ X_1 \operatorname{sen}\vartheta - X_2 \cos\vartheta)$

$A_\vartheta = \{ (X_1 \cos\vartheta + X_2 \operatorname{sen}\vartheta) \in V,\ (X_1 \operatorname{sen}\vartheta - X_2 \cos\vartheta) \notin V \}$

Gli spazi H e $\mathcal{H}$.

<u>Definizione</u> $\mathcal{H}$ è lo spazio gaussiano generato dalle v.a. $\langle x^*, \cdot \rangle$ con $x^* \in E^*$ e indichiamo $\| x^* \|_{\mathcal{H}}$ la norma L^2 di x^* pensato come variabile aleatoria.

Definiamo $R: E^* \longrightarrow E$ nel modo seguente

$$(R x^*) = \int_E \langle x^*, x \rangle \, x \, \mu(dx) \quad \text{(integrale di Bochner)}$$

Sull'immagine di RE^* consideriamo il prodotto scalare

$$\langle R x^*, R y^* \rangle_H = \int_E \langle x^*, x \rangle \langle y^*, x \rangle \, \mu(dx) = \langle x^*, y^* \rangle_{\mathcal{H}}$$

e sia H il completamento di RE^*: occorre però provare che $H \subseteq E$.

Sia infatti $(R x^*_n)$ di Cauchy in H

$$\| R x^*_n - R x^*_m \|_E = \left\| \int_E \langle x^*_n - x^*_m , x \rangle \, x \, \mu(dx) \right\|$$

$$\leq \sqrt{\int_E \|x\|^2 \mu(dx)} \sqrt{\int_E | \langle x^*_n - x^*_m , x \rangle |^2 \mu(dx)} =$$

$$= C_\mu \cdot \| x^*_n - x^*_m \|_{\mathcal{H}} = C_\mu \, \| R x^*_n - R x^*_m \|_H$$

Guardiamo la situazione:

$\mathcal{H} \sim H$, però $H \subseteq E$ e $\mathcal{H} \subseteq L^2(E,\mu)$

$R : E^* \longmapsto H$ si prolunga e $R : \mathcal{H} \longmapsto H$ e sia

$R^* : H \longmapsto \mathcal{H}$ l'applicazione aggiunta

$$\begin{tikzcd} E^* \arrow[r, hook] & \mathcal{H} \arrow[d, leftrightarrow] & \\ & H \arrow[r, hook] & E \end{tikzcd}$$

Terminologia classica:

$\mathcal{H}$ "spazio gaussiano"

H R.K.H.S.

Terminologia di Bogachev

H spazio di Cameron-Martin

$\mathcal{H}$ nucleo riproducente di μ

<u>Osservazione:</u> Se $(E, \mathcal{B}, \mu) = (C(0,T), \mathcal{B}, \mu)$

dove μ è la legge di un processo gaussiano, la nuova definizione di H coincide con la definizione di R.K.H.S.

Sia $x^* = \delta_\tau$

$$\delta_s(Rx^*) = \int_E \langle \delta_\tau, \omega \rangle \langle \delta_s, \omega \rangle \, \mu(d\omega) = \Gamma(\tau, s)$$

quindi $$R\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{\tau_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \Gamma(\tau_i, \cdot)$$

e $$\langle R\delta_\tau, R\delta_s \rangle_H = \int_E \langle \delta_\tau, \omega \rangle \langle \delta_s, \omega \rangle \, \mu(d\omega) = \Gamma(s, \tau)$$

Preso $x \in E$, sia μ_x l'immagine di μ mediante la traslazione di x, cioè

$$\mu_x(A) = \mu(A - x)$$

Teorema di Cameron-Martin generalizzato

* (parte facile) se $h \in H$, $\mu_h \sim \mu$ e

$$\frac{d\mu_h}{d\mu} = \exp\left((R^* h)(x) - \frac{1}{2} \|h\|_H^2 \right)$$

** (parte difficile) se $\mu_x \sim \mu \Rightarrow x \in H$

Proprietà di H:

1) $\overline{H}$ (chiusura su E) è il supporto topologico di μ

2) se $\dim(E) = +\infty$, H è trascurabile

3) $$H = \bigcap V$$

V sottospazio misurabile, $\mu(V) = 1$

---

3) è sostanzialmente identico al caso dello spazio di Wiener classico

1) cominciamo a provare che, se $x \notin \overline{H}$, non appartiene al supporto di μ.

Infatti esiste $x^* \in E^*$ con $\langle x^*, x \rangle = 1$ e

$\langle x^*, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \overline{H}$

Se x appartenesse al supporto di μ, avrei

$\int_E (\langle x^*, \tau \rangle)^2 \mu(d\tau) > 0$, ma questo numero è

$$\| R x^* \|_H^2 = \langle x^*, \underbrace{\int_E \langle x^*, \tau \rangle \, \tau \, \mu(d\tau)}_{\in H} \rangle = 0$$

Il fatto poi che il supporto di μ sia tutto $\overline{H}$ si prova come nel caso dello spazio di Wiener (in quel caso $\overline{H} = C_0(0,T)$)

2) Prendiamo una successione $x_1^*, x_2^*, \ldots$ di elementi di E^* che sia un sistema ortonormale completo in H

$x \in H$ se $\sum_n (\langle x_n^*, x\rangle)^2 < +\infty$.

quindi

$$H \subseteq \bigcup_{M>0} \{x \in E : \forall n \ |\langle x_n^*, x\rangle| \leq M\}$$

$\uparrow$

ognuno di questi è trascurabile

$$\{x \in E : \forall n, \ |\langle x_n^*, x\rangle| \leq M\} \subseteq$$

$$\{|\langle x_1^*, x\rangle| \leq M, |\langle x_2^*, x\rangle| \leq M, \ldots, |\langle x_k^*, x\rangle| \leq M\}$$

$$\mu\{\cdot \quad \cdot\} = \prod_{j=1}^{k} \mu(|\langle x_j^*, x\rangle| \leq M)$$

$$= \mu(|\langle x_1^*, x\rangle| \leq M)^k \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

<u>Osservazione:</u> conoscere $\mathcal{H}$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ (o così che è lo stesso H e $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$) equivale e conoscere μ.

Possono esistere due misure gaussiane μ_1 e μ_2 con $H_{\mu_1} = H_{\mu_2}$ però $\mu_1 \neq \mu_2$.