E.D.S.A.

Lezione 10 ①

Lo spazio gaussiano "classico", o spazio di Wiener.

È equivalente avere

$(W_\tau)_{0 \le \tau \le T}$ $\Longleftrightarrow$ $C_0([0,T], \mu)$

processo di Wiener o moto Browniano — misura di Wiener

$C_0([0,T])^*$ si identifica con le misure con segno a variazione finita su $C_0(0,T)$

$\sigma : \mathcal{B} \longmapsto \mathbb{R}$ ($\mathcal{B}$: σ-algebra di Borel)

$$\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n)$$

se $A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\sup_{A_i \cap A_j = \emptyset} \sum_{i=1}^{n} |\sigma(A_i)| < +\infty$$

$$\langle x^*, \omega \rangle = \langle \sigma, \omega \rangle = \int_0^T \omega(s)\, d\sigma(s)$$

Osservazione fondamentale:

$$\langle \sigma, \omega \rangle = \left(\int_0^T \sigma([s,T])\, dW_s \right)(\omega)$$

integrale di Wiener

e di conseguenza $\langle \sigma, \omega \rangle$ ha legge

$$N\left(0, \int_0^T \sigma([s,T])^2\, ds\right)$$

prendiamo infatti $\sigma = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\tau_i}$

$$\langle \sigma, \omega \rangle = \sum_{i=1}^n a_i W_{\tau_i}(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\int_0^T \delta_{\tau_i}([s,T])\, dW_s \right)(\omega)$$

$$= \left(\int_0^T \sigma([s,T])\, dW_s \right)(\omega)$$

Chiamiamo $\Gamma(s,\tau) = \operatorname{Cov}(W_s, W_\tau) = s \wedge \tau$

Prendiamo più in generale un processo gaussiano centrato $(X_\tau)_{0 \leq \tau \leq T}$ con traiettorie continue

La sua legge è una probabilità su $C(0,T)$

La legge è identificata da

$$\Gamma(s,t) = Cov(X_s, X_t) = E[X_s X_t]$$

Γ è <u>semidefinita positiva</u> nel senso che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \Gamma(t_i, t_j) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}\right) \geq 0$$

Facciamo l'ulteriore ipotesi che Γ sia <u>definita positiva</u>

Preso $\sigma \in C(0,T)^*$, $\langle \sigma, \omega \rangle = \int_0^T X_s(\omega)\, d\sigma(s)$

è una variabile gaussiana

$$Cov(\langle \sigma, \omega \rangle, \langle \tilde{\sigma}, \omega \rangle) = E\left[\left(\int_0^T X_s\, d\sigma(s)\right)\left(\int_0^T X_t\, d\tilde{\sigma}(t)\right)\right]$$

$$= \iint_{[0,T]\times[0,T]} \Gamma(s,t)\, d\sigma(s)\, d\tilde{\sigma}(t)$$

Definizione R.K.H.S.

(Reproducing Kernel Hilbert Space)

Prendiamo lo spazio generato dalle funzioni $\Gamma(s,\cdot)$ col prodotto scalare $\langle \Gamma(s,\cdot), \Gamma(\tau,\cdot) \rangle = \Gamma(s,\tau)$: il completamento H è uno <u>spazio di Hilbert</u> di funzioni e per ogni $f \in H$, $\qquad \langle f, \Gamma(s,\cdot) \rangle = f(s)$

a) se $f_n \mapsto f$ in H, ci converge puntualmente

b) se $\Gamma(\tau,\tau)$ è limitata, la convergenza è uniforme

c) se $\Gamma(s,\cdot)$ è continua per ogni s,

$$H \subseteq C(0,T)$$

$$|f_n(\tau) - f(\tau)| = |\langle f_n - f, \Gamma(\tau,\cdot) \rangle_H| \leq \|f_n - f\|_H \cdot \Gamma(\tau,\tau)$$

Sia $(X_t)_{0\le t\le T}$ un processo gaussiano su $(\Omega,\mathcal{F},P)$ e sia $\mathcal{H}$ lo spazio gaussiano generato dalle variabili X_t (cioè la chiusura in $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ delle combinazioni lineari finite $\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}$)

Proposizione: Gli spazi H e $\mathcal{H}$ sono isomorfi e l'isomorfismo è dato da

$$Z\in\mathcal{H} \longrightarrow \left(E[Z X_t]\right)_{0\le t\le T}$$

Dimostrazione

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}\right) \longrightarrow E\left[\left(\sum a_i X_{t_i}\right)X_t\right]_{0\le t\le T} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\,\Gamma(t_i,\cdot)$$

$$\left\|\sum a_i X_{t_i}\right\|_{\mathcal{H}}^2 = E\left[\left(\sum a_i X_{t_i}\right)^2\right] =$$

$$= \sum a_i a_j\,\Gamma(t_i,t_j) = \left\|\sum a_i\,\Gamma(t_i,\cdot)\right\|_H^2$$

$\square$

Guardiamo il caso specifico dello

<u>Spazio di Wiener</u> $C_0(0,T)$, $\Gamma(s,t) = s \wedge t$

Se $k \in L^2(0,T)$, l'integrale $\int_0^T k(s)\,dW_s =$

$= \left(\lim \sum k(t_i)\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)\right)$ è chiamato

<u>integrale di Wiener</u> e indicato $W(k)$.

<u>Proposizione 1</u> $\mathcal{H} = \{ W(k) \mid k \in L^2(0,T) \}$

<u>Proposizione 2</u> $H = H_0^1(0,T) =$

$= \left\{ h : h(t) = \int_0^t h'(s)\,ds \right.$, con $\left. h' \in L^2(0,T) \right\}$

ed è lo <u>Spazio di Cameron - Martin classico</u>

<u>Dimostrazione</u>

$\Gamma(s,\cdot) = s \wedge \cdot = \int_0^{\cdot} I_{[0,s]}(u)\,du$

$$\left(\sum a_i \Gamma(s_i,\cdot)\right) = \int_0^{\cdot} \sum a_i I_{[0,s_i]}(u)\,du$$

$$\left\| \sum a_i I(s_i,\cdot) \right\|^2_H = \sum a_i a_j \, s_i \wedge s_j =$$

$$= \int_0^T \sum a_i a_j \, I_{[0,s_i]}(u)\, I_{[0,s_j]}(u)\,du$$

$$= \int_0^T \left(\sum a_i I_{[0,s_i]}(u) \right)^2 du$$

e poi si completa.

Richiami sul Teorema di Girsanov

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad (W_t)_{0 \le t \le T}$ processo di Wiener

$\mathcal{F}_t = \sigma(W_s,\ s \le t)$ $\qquad \mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Sia $H(s,\omega)$ progress. misurabile con

$\int_0^T H_s^2\,ds < +\infty$ q.c. e tale che, posto

$$L_t = \exp\left(\int_0^t H_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2\,ds \right)$$

si abbia $\quad E[L_T] = 1$

Posto P^* con $\frac{dP^*}{dP} = L_T$, sotto P^* (8)

$\left(W_t - \int_0^t H_s\, ds\right)$ è un processo di Wiener

Inoltre tutte le probabilità equivalenti si ottengono allo stesso modo.

Cameron-Martin (≈ 45) hanno trovato questo risultato nel caso in cui $h(s)$ sia deterministica con $\int_0^T h^2(s)\, ds < +\infty$

Si ottiene con questo risultato

<u>Teorema</u> Sia μ la misura di Wiener su $C_0(0,T)$, $h \in C_0(0,T)$ e $\mu_h(A) = \mu(A-h)$: allora $\mu_h \sim \mu$ se e solo se $h \in H_0^1(0,T) = H$ e in tal caso, posto $h(t) = \int_0^t h'(s)\, ds$

$$\frac{d\mu_h}{d\mu} = \exp\left(W(h') - \frac{1}{2}\int_0^T h'(s)^2\, ds\right)$$

Guardiamo bene la formula:

se $R : \mathcal{H} \longmapsto H$

$R : W(k) \longmapsto \int_0^{\cdot} k(s)\, ds$

e se R^* l'aggiunto

$R^* : h(t) = \int_0^t h'(s)\, ds \longrightarrow W(h')$

la formula di Cameron - Martin si può riscrivere

$$\frac{d\mu_h}{d\mu} = \exp\left(R^*(h) - \frac{1}{2} \|h\|_H^2 \right)$$

Teorema: il supporto topologico della misura di Wiener μ è tutto $C_0(0,T)$

Dimostrazione ω appartiene a $\mathrm{Supp}(\mu)$ se per ogni $\delta > 0$, $S(\omega, \delta)$ ha misura positiva.

Sia ora $x \in C_0(0,1)$, prendiamo $w \in \text{supp}(\mu)$ e $h \in H$ con $\| h - (x - w) \| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$S\left(w, \frac{\varepsilon}{2}\right) + h \subseteq S(x, \varepsilon)$$

non trascurabile

<u>Proprietà dello spazio di Cameron-Martin classico</u> :

1) H è denso in $C_0(0,T)$

2) H è trascurabile

3) $H = \bigcap V$

V sottospazio, $\mu(V) = 1$

L'unico punto impegnativo è il terzo

Sia V sottospazio di misura 1, $h \in H \Rightarrow$ anche $(V-h)$ ha misura 1; ma se h non appartiene a V, V e $(V-h)$ hanno intersezione vuota

La seconda parte segue da questo:

$\omega \in H$ se e solo se $\sup\limits_{\sigma \in C_0(0,1)^*,\ \|\sigma\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \langle \sigma, \omega \rangle < +\infty$

e questo numero, se finito, coincide con $\|\omega\|_H$

Ricordiamo $\sigma \to \int_0^T W_s \, d\sigma(s) = \int_0^T \sigma([s,T]) \, dW_s$

e $\|\sigma\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^T \sigma([s,T])^2 \, ds$

Se $\omega \notin H$, esistono $\sigma_1, \sigma_2 \dots$ con $\|\sigma_j\|_{\mathcal{H}} = 1$

e $\langle \sigma_n, \omega \rangle \geq n$; di conseguenza ω non appartiene e $V = \left\{ w \in C_0(0,T) \;\middle|\; \sum n^{-2} |\langle \sigma_n, w \rangle| < +\infty \right\}$

Ma V è un sottospazio con $\mu(V) = 1$ perché

$\sum\limits_n n^{-2} \cdot E\left[|\langle \sigma_n, w \rangle| \right] \leq$

$\leq \sum\limits_n n^{-2} \cdot E\left[|\langle \sigma_n, w \rangle|^2 \right]^{1/2} < +\infty$

$\square$