Lezione 8 Torniamo al caso regolare

Dati $b : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$

$\sigma : \mathbb{R}^{d \times d} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ $\quad \mathcal{C}^1_b$

Il problema di Cauchy per $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione (in legge)

$$X(t,x) = X_t(x) \qquad \boxed{p_t(x,\cdot) = P_{X_t(x)}}$$

Data una funzione $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Borel limitata

poniamo $$P_t f(x) = \mathbb{E}\left[f(X(t,x))\right]$$

$$\left(= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, p_t(x,dy) \right)$$

La famiglia delle funzioni $(P_t)_{t \geq 0}$ è detta

<u>Semigruppo</u> di evoluzione associato alla EDS

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB$$

oppure al $\mathcal{L}f(x) = b(x)\nabla f(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^*\nabla^2 f)(x)$

---

1) Se f è continua limitata, $x \mapsto P_t f(x)$ è continua e limitata

Se $x_n \to x$ allora $X(t,x_n) \to X(t,x)$ in L^2

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[|X(t,x) - X(t,y)|^2\right] \le C\,\mathbb{E}\left[|X(t,x) - X(t,y)|^2\right]$$

$$\Rightarrow \text{Gronwall} \quad \mathbb{E}\left[|X(t,x) - X(t,y)|^2\right] \le e^{Ct}|x-y|^2$$

2) $$\underbrace{|P_t f(x)|}_{} = \left|\mathbb{E}\left[f(X(t,x))\right]\right| \le \mathbb{E}\left[|f(X(t,x))|\right] = P_t|f|(x) \underbrace{\le \|f\|_\infty}_{}$$

Se $f \ge 0 \Rightarrow P_t f(x) \ge 0$

$P_t 1 = 1$

3) $$P_t(P_s f)(x) = P_{s+t} f(x) \quad \forall s,t \ge 0$$

Dim Considero il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} dY_r = b(Y_r)dr + \sigma(Y_r)dB_r \\ Y_0 = y \end{cases}$$

dove Y ha la stessa legge di $X(s,x)$

una soluzione di questo problema è data da

$Y_r = X(r+s, x)$ infatti basta

scriverla in forma integrale e notare che il

processo $W_u := B_{u+s} - B_s$ è un moto

Browniano rispetto alla filtr. $\tilde{\mathcal{F}}_u = \mathcal{F}_{u+s}$

$$X(r+s,x) = \overbrace{X(s,x)}^{Y} + \int_s^{s+r} b(X(u+s,x))\,du + \int_s^{s+r} \sigma(X(u+s,x))\,\underbrace{dB_u}_{dW_u}$$

se H è semplice

$$\int_s^{s+r} H_u\,dB_u = \sum H_{u_i}\left(B_{u_{i+1}} - B_{u_i} + - B_s\right) = \sum H_{u_i}\left(W_{u_{i+1}} - W_{u_i}\right) = \int_s^{s+r} H_u\,dW_u$$

$$P_t(P_s f)(x) = P_t\left(\underbrace{\mathbb{E}[f(X(s,\cdot))]}\right)(x)$$

Un'altra soluzione del problema di Cauchy

è data da $X(r, Y)$ sapendo $Y=y$

$$\mathbb{E}[f(Y_r)] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[f(Y_r) \mid Y=y]\big]$$

$$\Vert \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\mathbb{E}_c\big[f(X(s+r,x))\big] = \mathbb{E}\big[\underbrace{\mathbb{E}[f(X(r,y)) \mid Y=y]}\big]$$

$$\Vert$$

$$P_{s+r}f(x) = \mathbb{E}\big[P_r f(y)\big|_{Y=y}\big]$$

$$= \mathbb{E}\big[P_r f(X(s,x))\big]$$

$$= P_s(P_r f)(x)$$

---

4) Se $f \in \mathcal{C}_b^2$

$$\frac{d}{dt} P_t f(x) = \mathbb{E}\left[\frac{d f(X(t,x))}{dt}\right]$$

Itô

$$= \mathbb{E}\big[(\mathcal{L}f)(X(t,x))\big]$$

$$= P_t(\mathcal{L}f)(x)$$

Se $t=0$ $\square$

Misura invariante per una EDS _

Def Diciamo che una misura (di probabilità) μ su $\mathbb{R}^d$ è invariante per EDS (oppure per il semigruppo)

$$\left[\begin{array}{l} \text{Se} \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} P_t f(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, d\mu(x) \quad \forall t \geq 0 \end{array}\right.$$

Equivalentemente per il processo :

Se $\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \\ X_0 \sim \mu \end{cases}$

allora $X_t \sim \mu \quad \forall t \geq 0$

Problema lo spazio $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ è di Banach (non separabile)

Soluzione Se μ è invariante possiamo estendere $(P_t)_{t\geq 0}$ su ciascun spazio $L^p(\mu)$ $\quad p \geq 1$

$\left(\text{per densità delle } \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) \text{ in } L^p(\mu) \right)$

Infatti data $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ si può stimare

$$\| P_t f \|^p_{L^p(\mu)} = \int_{\mathbb{R}^d} |P_t f|^p(x) \, d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \cancel{P_t}(|f|^p)(x) \, d\mu(x) = \| f \|^p_{L^p}$$

$$|P_t f(x)|^p = |\mathbb{E}[f(X(t,x))]|^p$$

$$\leq \mathbb{E}[|f(X(t,x))|^p]$$

$$= P_t(|f|^p)(x)$$

$$\left[\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p(\mu) \longmapsto P_t f \in L^p(\mu) \\ \qquad\qquad \| P_t f \|_{L^p} \leq \| f \|_{L^p} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Se } f, g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) & P_t(f+g) = P_t f + P_t g \\ \lambda \in \mathbb{R} & P_t(\lambda f) = \lambda P_t f \end{array} \right.$$

Se $\underline{\underline{p=2}}$ $\qquad P_t : L^2(\mu) \longrightarrow L^2(\mu)$

Def $(P_t)_{t\geq 0}$ è simmetrico (rispetto a μ invariante)

se $\forall f, g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}^d} (P_t f)(x) \cdot g(x) \, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, P_t g(x) \, d\mu(x)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} (P_t f) g \, d\mu = \int f (P_t g) \, d\mu \quad (*) \quad \forall t \geq 0$$

[Se $g \equiv 1$ $\quad \int_{\mathbb{R}^d} P_t f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu$

OSS • $(P_t)_{t\geq 0}$ è simmetrico $\iff \forall f, g \in \mathcal{C}^2_c$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{L} f) g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f (\mathcal{L} g) \, d\mu$$

• μ è invariante $\iff \forall f \in \mathcal{C}^2_c$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L} f \, d\mu = 0$$

Esempio di semigruppo con misura invariante esplicita e simmetrico. Sia $V \in \mathcal{C}^2$ con $\|\nabla^2 V\|_\infty < \infty$

esempio $V(x) = |x|^2$

tale che $e^{-V(x)}$ sia integrabile rispetto a Lebesgue

$$d\mu = \frac{e^{-V(x)}}{Z} dx \quad \text{con} \quad Z = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-V(x)} dx$$

é misura invariante per EDS

$$dX_t = -\nabla V(X_t)\,dt + \sqrt{2}\,dB_t$$

In particolare se $V(x) = |x|^2$ otteniamo Ornstein-Uhlenbeck

$$dX_t = -2X_t\,dt + \sqrt{2}\,dB_t$$

Infatti scriviamo il generatore

$$\mathcal{L}f(x) = -\nabla V(x)\nabla f(x) + \Delta f(x)$$

$$= e^{V(x)} \operatorname{div}\left(e^{-V(x)} \nabla f(x)\right)$$

$= *$

$$\mathrm{div}(b) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} b^i(x)$$

$$\mathrm{div}(u \cdot b) = u\, \mathrm{div}(b) + b \cdot \nabla u$$

$$* = \cancel{e^{V}} \cancel{e^{-V}} \Delta f - \cancel{e^{V}} \cancel{e^{-V}} \nabla V \nabla f = \mathcal{L} F$$

Date $f, g \in \mathcal{C}^2_c$

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{L} F)\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \cancel{e^{V}} \mathrm{div}(e^{-V} \nabla f) \frac{\cancel{e^{-V}}}{Z}$$

$$= \frac{1}{Z} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}(e^{-V} \nabla f)$$

$$= \frac{1}{Z} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_i \partial_i \big(\underbrace{e^{-V} \partial_i f}_{\mathcal{C}^1_c}\big) = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{L} F)\, g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}(e^{-V} \nabla f)\, g$$

$$= \sum_i \int_{\mathbb{R}^d} \partial_i (e^{-V} \partial_i f)\, g$$

$$= -\sum_i \int_{\mathbb{R}^d} \partial_i f \, (\partial_i g) e^{-V}$$

$$= \sum_i \int_{\mathbb{R}^d} f \; \partial_i (\partial_i g \, e^{-V})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f \left(\sum_i \partial_i (\partial_i g \, e^{-V}) e^{V} \right) e^{-V}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f (\mathcal{L} g) \, d\mu$$

Criteri per l'esistenza di misure invarianti

Lemma (Krylov - Bogoliubov) Sia $(\mu_t)_{t \geq 0}$ $\mu_t = P_{X_t}$

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t$$

Definiamo le medie temporali $\frac{1}{T} \int_0^T \mu_t \, dt$

come la misura $\int_{\mathbb{R}^d} f \left(\frac{1}{T} \int_0^T \mu_t \, dt \right) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu_t \right) dt$

Se la famiglia $\left(\frac{1}{T} \int_0^T \mu_t \, dt \right)_{T \geq 1}$ é tesa allora esiste una misura invariante μ

$(\mu_i)_{i\in I}$ Tesa $\overset{\text{Def}}{\iff}$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \subseteq \mathbb{R}^d$ cpt tale che

$$\mu_i(K^c) < \varepsilon \quad \forall i \in I$$

Lemma (Kas'minski) Se esiste $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ tale che $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$ e

$$\lim_{|x|\to\infty} \mathcal{L}V(x) = -\infty$$

allora esiste una distribuzione invariante.

OSS Se μ, ν sono invarianti (per (P_t)) allora $(1-t)\mu + t\nu$ è invariante

inoltre se $(\mu_n)_n$ invarianti $\mu_n \to \mu$ strettamente allora μ è invariante