Lezione 7

Data EDS

$$dX_t = b_t(X_t)\,dt + \sigma_t(X_t)\,dB_t$$

Unicità per traiettorie $\qquad\qquad$ Esiste sol. forte

Unicità in legge $\qquad\qquad$ Esiste sol. (debole)

Yamada - Watanabe - Engelbert - Cherny

Def Unicità in legge congiunta. Date soluzioni

$$(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{F}, B, X) \qquad (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{B}, \tilde{X})$$

vale unicità in legge congiunta se $P_{(B,X)} = \tilde{P}_{(\hat{B},\tilde{X})}$

Cherny: Se vale unicità in legge $\Longrightarrow$ vale unicità in legge congiunta

Problema della martingala

Data una soluzione X dell'eq. $dX_t = b_t(X_t)\,dt + \sigma_t(X_t)\,dB_t$

$$\underbrace{X_t - X_0 - \int_0^t b_s(X_s)\,ds}_{\uparrow \text{ usa solo } X \text{ e non } B} = \underbrace{\int_0^t \sigma_s(X_s)\,dB_s}_{\uparrow \text{ è una martingala}}$$

Sia $f \in \mathcal{C}^2_b(\mathbb{R})$ e usiamo la formula di Itô

$$\underbrace{f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \left[b_s(X_s) f'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma_s^2(X_s) f''(X_s)\right] ds}_{= \int_0^t \sigma_s(X_s) f'(X_s)\,dB_s}$$

Nel caso vettoriale $X_t : \Omega \to \mathbb{R}^d$ $\quad b_t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ $\quad \sigma_t : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$

la formula di Itô per $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ diventa

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \boxed{\left(b_s \nabla f + \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left(\sigma_s \cdot \sigma_s^T \cdot \nabla^2 f\right)\right)}(X_s)\,ds$$

$$= \underbrace{\int_0^t \sigma_s(X_s) \nabla f(X_s)\,dB_s}_{} \leftarrow \text{martingala}$$

Poniamo il generatore $\boxed{\mathcal{L}_s f(x) = b_s(x) \nabla f(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma_s(x)\sigma_s^T(x)\, \nabla^2 f(x)\right)}$

Def Dati $(b_s)_{s\in[0,T]}$ $(\sigma_s)_{s\in[0,T]}$, posto

$\mathcal{L}_s f$ come sopra $\forall f \in \mathcal{C}^2_b$, diciamo che

un processo $(X_t)_{t\in[0,T]}$ → continuo e adattato a $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ definito su uno spazio

di prob. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ risolve il problema

delle martingale se $\forall f \in \mathcal{C}^2_b(\mathbb{R}^d)$

$$t \mapsto f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{L}_s f(X_s)\, ds \quad \text{è una}$$

martingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$.

OSS data una soluz. X del MP, la sua legge P_X

come misura di prob. sullo spazio $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$

su questo spazio "canonico" il processo "canonico"

$$e_t : (\gamma_s)_{s\in[0,T]} \longrightarrow e_t(\gamma) = \gamma_t$$

risolve il MP (con gli stessi dati b, σ) con la filtrazione naturale

Infatti data $f \in \mathcal{C}^2_b(\mathbb{R}^d)$

$$f\circ e_t - f\circ e_0 - \int_0^t (\mathcal{L}_s f)\circ e_s\, ds \quad \text{è una martingala}$$

rispetto a P_X ?

Sappiamo che $f\circ X_t - f\circ X_0 - \int_0^t \mathcal{L}_s f\circ X_s\, ds$ è una martingala rispetto a P, ossia $\forall t'<t$

$$\mathbb{E}_P\left[\left(f\circ X_t - f\circ X_0 - \int_0^t \mathcal{L}_s f\circ X_s\, ds\right) \Big| \mathcal{F}_{t'}\right] =$$

$$= f\circ X_{t'} - f\circ X_0 - \int_0^{t'} \mathcal{L}_s f\circ X_s$$ mis. rispetto a $\sigma(X_s : s\le t')$

Vale $\sigma(X_s : s \le t') \subseteq \mathcal{F}_{t'}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_P\left[f\circ X_t - f\circ X_0 - \int_0^t \mathcal{L}_s f\circ X_s\, ds \,\Big|\, X_s : s\le t'\right]$$
$$= f\circ X_{t'} - f\circ X_0 - \int_0^{t'} \mathcal{L}_s f\circ X_s$$

Esercizio $(M_t)_{t\in[0,T]}$ martingala rispetto a $\left(\sigma(X_s : s\le t)\right)_{t\in[0,T]}$

$$M_t = g_t\left((X_s)_{s\le t}\right)$$

allora $$\underbrace{\mathbb{E}_P[\, M_t \mid X_s \quad s\le t'\,]}_{h_t(X)} = \left(\mathbb{E}_{P_X}[\, g_t \mid e_s \quad s\le t'\,]\right)\circ X$$

Unicità per il MP è l'unicità in legge ossia

se $(\Omega, \mathcal{A}, P, \mathcal{F}, X)$ $(\tilde{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{P}, \hat{\mathcal{F}}, \tilde{X})$

soddisfano MP allora $\underline{P_X = \hat{\tilde{P}}_{\tilde{X}}}$

Vale il seguente risultato. Se X risolve il MP, allora

esiste una soluzione $(\hat{B}, \hat{\tilde{X}})$ della EDS tale che

$$P_X = \tilde{P}_{\tilde{X}}.$$

<u>Idea</u>: Se $\sigma_t(x) \neq 0$ allora se X risolve EDS

$$dX_t = b_t(X_t)\,dt + \sigma_t(X_t)\,dB_t$$

allora $dB_t = \sigma_t^{-1}(X_t)\,dX_t - \sigma_t^{-1}(X_t)\,b_t(X_t)\,dt$

definisco allora se X risolve il MP

$$B_t = \int_0^t \sigma_s^{-1}(X_s)\,dX_s - \int_0^t \sigma_s^{-1}(X_s)\,b_s(X_s)\,ds$$

che integrale è?

Se $\sigma_t(x) \equiv 0$ definisco un BM indipendente

Sol (debole) $\Longleftrightarrow$ MP $\Longrightarrow$ Eq. di Kolmogorov

Data una sol. X se $f \in \mathcal{C}^2_b(\mathbb{R}^d)$,

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{L}_s f(X_s)\,ds \quad \text{è martingala (vera)}$$

il valore atteso è costante:

$$\mathbb{E}\left[f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{L}_s f(X_s)\,ds\right] = 0$$

ossia $$\mathbb{E}[f(X_t)] = \mathbb{E}[f(X_0)] + \int_0^t \mathbb{E}[\mathcal{L}_s f(X_s)]\,ds$$

Posto $\mu_t = P_{X_t}$, possiamo scrivere

$$\boxed{* \quad \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu_t = \int_{\mathbb{R}^d} f\,d\mu_0 + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{L}_s f)\,d\mu_s\right) ds}$$

$\mathcal{C}^2_b(\mathbb{R}^d) \ni f \mapsto \mathcal{L}_s f$ è lineare.

$$\frac{d}{dt}\int f\,d\mu_t = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}_t f\,d\mu_t \qquad \forall f \in \mathcal{C}^2_b$$

scriviamo allora l'equazione di Kolmogorov forward
(o Fokker-Planck)

$$\boxed{\partial_t \mu_t = \mathcal{L}_t^* \mu_t}$$ come abbreviazione di (*)

Esempi Se $X = B$ è BM in $\mathbb{R}^d$ $(\sigma = Id)$

il generatore $\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2} Tr(\nabla^2 f) = \frac{\Delta f}{2}$

$$\partial_t \mu_t = \frac{1}{2} \Delta^* \mu_t$$

oss Se $\mu_t \ll \mathcal{L}^d$ con densità regolare u_t allora

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu_t = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \Delta f \, d\mu_t = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \Delta f(x) \, u_t(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2} f(x) \, u_t(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2} u_t(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, \Delta u_t(x) \, dx$$

u_t soddisfa l'eq. del calore

$$\partial_t u_t = \frac{1}{2} \Delta u_t$$

Esempio 2 Se $\sigma \equiv 0$ e $b_t \in \mathcal{C}^1$

ancora supponiamo $\mu_t = u_t \mathcal{L}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}_t f \, d\mu_t = \int_{\mathbb{R}^d} b_t(x) \nabla f(x) \, u_t(x) \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^d b_t^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \, u_t(x) \, dx$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x^i} \left(b_t^i(x) \, u_t(x) \right) dx$$

$$= - \int f(x) \left((\operatorname{div} b_t) u_t + b_t \nabla u_t \right)$$

$$\partial_t u = -(\operatorname{div} b_t) \cdot u + b_t \nabla u$$

$$\overset{!}{=} -\operatorname{div}(b_t u)$$

- Unicità per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t = \mathcal{L}_t^* \mu_t \\ \mu_0 = \bar{\mu} \end{cases}$$

- Esistenza

$$\left[\text{Unicità in legge} \overset{??}{\Longrightarrow} \text{Unicità per il problema di Kolmogorov forward} \right.$$

<u>Teorema</u> (Echeverria - Kurtz - Smirnov - Ambrosio Figalli)

Sia $(\mu_t)_{t \in [0,T]}$ una curva di misure di prob. in $\mathbb{R}^d$ continua rispetto alla convergenza stretta che risolva

$$\partial_t \mu_t = \mathcal{L}_t^* \mu_t$$

dove $\mathcal{L}_t f = b_t \nabla f + \frac{1}{2} \mathrm{tr}(\sigma_t \sigma_t^T \nabla^2 f)$

con b e σ Borel limitati.

Allora esiste $(X_t)_{t \in [0,T]}$ sol. del MP tale che $\mu_t = P_{X_t} \quad \forall t \in [0,T]$.

Eq. di Kolmogorov backward

Diciamo che $f(t,x) \in \mathcal{C}^1_t \ \mathcal{C}^2_x$ soddisfa Kolmogorov

se vale $\quad \partial_t f(x) = -\mathcal{L}_t f(x) \quad \forall t \in (0,T)$
$\forall x \in \mathbb{R}^d$

Il problema di Cauchy si intende assegnato $f(T,x)$

<u>Lemma</u> Se $(\mu_t)_{t\in[0,T]}$ risolve Kolmogorov forward

e $(f_t)_{t\in[0,T]}$ " " backward

allora $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f_t \, d\mu_t$ è costante

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} f_t \, d\mu_t = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t f_t)\, d\mu_t + \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{L}_t f_t \, d\mu_t}_{=0}$$

<u>OSS</u> Se X è soluzione (debole) di $dX = b_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dB$

e f soddisfa Kolmogorov backward

$\Rightarrow \quad f(t, X_t)$ è martingala.

Se b e σ sono regolari allora

$$f_t(x) = \mathbb{E}\left[\bar{f}\left(X(T, t, x)\right)\right]$$

dove $X(T, t, x)$ è la soluzione dell'EDS

$$\begin{cases} X(t', t, x) = x + \int_t^{t'} b_s(X(s, t, x))\, ds + \\ \qquad + \int_t^{t'} \sigma_s(X(s, t, x))\, dB_s \\ \text{per } t' \in [t, T] \end{cases}$$